Prof. Dr. Carsten Burstedde
Jutta Adelsberger, Daniel Wissel

universität bonn


## Übungsblatt 4.

Abgabe am **Dienstag, 15.11.2011**

**Aufgabe 10.** (Singulärwertzerlegung) (12 Punkte)

Es sei

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Geben Sie eine Singulärwertzerlegung $A = U\Sigma V^T$ an.

b) Bestimmen Sie unter allen Lösungen von

$$Ax = (1,1)^T$$

diejenige Lösung $\hat{x}$ mit minimaler Euklidischer Norm

$$\|\hat{x}\|_2 = \min \left\{ \|x\|_2 : Ax = (1,1)^T \right\}.$$

c) Für $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ sei $B = U\Sigma V^T$ eine Singulärwertzerlegung von $B$ mit

$$\Sigma = \operatorname{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{m\times n} \text{ mit } \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0.$$

Zeigen Sie, dass für jedes $B$

$$\sigma_1 = \max_{y\in\mathbb{R}^m, x\in\mathbb{R}^n} \frac{y^T Bx}{\|y\|_2 \|x\|_2}.$$

*Hinweis:* Ist $U \in O(m)$ und $x \in \mathbb{R}^m$, dann gilt $\|Ux\|_2 = \|x\|_2$.

**Aufgabe 11.** (Jacobi-Überrelaxation) (16 Punkte)

Zu einem linearen Iterationsverfahren der Form $\phi(x_m) = Gx_m + f$ definieren wir das zugehörige *relaxierte Iterationsverfahren zu* $\omega \in \mathbb{R}$ mittels der Konvexkombination $x_{m+1} := \omega\phi(x_m) + (1-\omega)x_m$. Das Ziel dieser Relaxation ist die Verbesserung der Konvergenzgeschwindigkeit des ursprünglichen Verfahrens, $\omega$ heißt auch *Dämpfungsparameter*. Gegeben sei nun das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit einer symmetrischen Matrix $A = D - E - F$ mit Einheitsdiagonale $D = I$ und Eigenwerten $0 < \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$.

a) Geben Sie das zum Jacobi-Verfahren gehörige relaxierte Iterationsverfahren durch seine Iterationsmatrix $G_\omega$ an.

b) Zeigen Sie, dass das relaxierte Jacobi-Verfahren genau dann konvergiert, wenn $0 < \omega < 2/\lambda_n$ ist.

c) Bestimmen Sie den optimalen Relaxationsparameter $\omega_{opt}$, für welchen $\rho(G_{\omega=\omega_{opt}})$ minimal wird. Berechnen Sie ebenfalls den Wert des Spektralradius $\rho(G_{\omega_{opt}})$.

**Programmieraufgabe 4.** (Eigenwerte und Singulärwertzerlegung) (28 Punkte)

a) Schreiben Sie ein Programm, das für eine symmetrische Matrix $A$ mittels des $QR$-Algorithmus approximativ alle Eigenwerte bestimmt. Bringen Sie dazu die Matrix zunächst mittels Householder-Transformationen auf Tridiagonalgestalt und führen Sie anschließend die iterativen $QR$-Zerlegungen mit Hilfe von Givens-Rotationen durch. Verwenden Sie ein geeignetes Abbruchkriterium.

b) Schreiben Sie ein weiteres Programm, das für eine beliebige rechteckige Matrix $A$ die Singulärwertzerlegung berechnet. Bringen Sie dazu die Matrix zunächst mittels Householder-Transformationen auf Bidiagonalgestalt (siehe Lemma 2.10 der Vorlesung) und führen Sie anschließend die iterativen $QR$-Zerlegungen der symmetrischen Matrizen $A_k = B_k^T B_k$ mit Hilfe von Givens-Rotationen durch; dabei soll die Matrix $A_k$ nicht explizit aufgestellt werden, sondern nur auf den $B_k$ operiert werden. Verwenden Sie ein geeignetes Abbruchkriterium. Geben Sie sowohl die Singulärwerte $\Sigma$ als auch die orthogonalen Matrizen $U, V$ mit $U^T A V = \Sigma$ aus.

c) Testen Sie beide Programme anhand der sog. Hilbertmatrizen

$$H^{(n)} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots & \frac{1}{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{pmatrix}$$

und bestimmen Sie deren Eigenwerte sowie Singulärwerte für $n = 2, 3, 10, 100$ auf eine relative Genauigkeit von $10^{-6}$. Berechnen Sie außerdem die Singulärwertzerlegung der Matrix aus Aufgabe 10 und überprüfen Sie das Ergebnis.

Abgabe **Mi 23.11.** und **Do 24.11.** im **CIP-Pool** (`www.iam.uni-bonn.de/pcpool/`). Ab Mi 16.11. hängt eine Terminliste für diese beiden Tage aus; bitte tragen Sie sich in 2–3er Gruppen ein. Die Liste befindet sich Mo–Mi im CIP-Pool der Wegelerstraße, Do–Fr im CIP-Pool der Endenicher Allee.

**Gesamtpunktzahl: 28 + 28 Punkte**