Einführung in die Numerische Mathematik

Wintersemester 2011/12
Prof. Dr. Carsten Burstedde
Jutta Adelsberger, Daniel Wissel

universitätbonn

Übungsblatt 5.

Abgabe am **Dienstag, 22.11.2011**

Aufgabe 12. (Optimale Relaxation für konsistent geordnete Matrizen) (24 Punkte)

Sei die Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ in $A = D - E - F$ zerlegt. A sei konsistent geordnet, d.h. die Eigenwerte von $J(\alpha) = D^{-1}(\alpha E + \alpha^{-1}F)$ mit $\alpha \neq 0$ seien unabhängig von α. Ferner habe die Matrix $J := D^{-1}(E + F)$ nur reelle Eigenwerte, die alle betragsmäßig kleiner als 1 seien. Unter diesen Voraussetzungen lässt sich der optimale Wert des Parameters ω für die Überrelaxation explizit ermitteln (Young, 1950). Gesucht ist also

$$\omega_{opt}, \text{ so daß } \rho(K(\omega_{opt})) = \min_{\omega\in\mathbb{R}} \rho(K(\omega)) \overset{!}{=} \min_{0<\omega<2} \rho(K(\omega)),$$

wobei $K(\omega) = (D - \omega E)^{-1}[(1-\omega)D + \omega F]$ die Iterationsmatrix des SOR-Verfahrens ist und $\rho(M)$ den Spektralradius einer Matrix M bezeichnet.

a) Sei die Matrix A zusätzlich als $A = I - \omega D^{-1}E$ definiert. Damit ist A offensichtlich regulär. Zeigen Sie, dass

$$A^{-1} \equiv (I - \omega D^{-1}E)^{-1} = (D - \omega E)^{-1}D.$$

b) Stellen Sie die Matrix $C = (\lambda + \omega - 1)I - \lambda\omega D^{-1}E - \omega D^{-1}F$ als Produkt AB der Matrizen A und B dar, wobei A die Matrix aus Teilaufgabe a) ist. Wie lautet $\det(A)$? Was folgt daraus für $\det(B)$?
Bemerkung: Sehen Sie hier λ zunächst als reelle Zahl an. Später wird sich zeigen, dass unter λ ein Eigenwert der Matrix $K(\omega)$ zu verstehen ist.

c) Zeigen Sie mit Hilfe von a) und b)

$$\det(\lambda I - K(\omega)) = \det\left((\lambda + \omega - 1)I - \lambda\omega D^{-1}E - \omega D^{-1}F\right).$$

d) Zeigen Sie, dass für $\lambda \neq 0$ und $\lambda + \omega - 1 = \sqrt{\lambda}\omega\mu$ mit $\mu \in \mathbb{R}$

$$\det(\lambda I - K(\omega)) = \left(\sqrt{\lambda}\omega\right)^n \det\left(\mu I - D^{-1}\left(\sqrt{\lambda}E + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}F\right)\right)$$

aus c) folgt.

e) Zeigen Sie: Ist μ ein Eigenwert von J, so ist auch $-\mu$ Eigenwert von J.
Hinweis: Betrachten Sie hierzu $J(1)$ und $J(-1)$.

f) Die Eigenwerte $\lambda \neq 0$ von $K(\omega)$ mit $\omega \neq 0$ korrespondieren mit den Eigenwerten μ der Matrix J durch die Gleichung

$$(\lambda + \omega - 1)^2 = \lambda\omega^2\mu^2.$$

Was gilt im Fall $\lambda = 0$?
Bemerkung: Dies bedeutet: Ist λ Eigenwert von $K(\omega)$, so ist das μ, das sich durch die Formel dieser Teilaufgabe aus λ ermitteln lässt, ein Eigenwert von J.
Hinweis: Beachten Sie hierbei die Aufgaben e) und d).

g) Sei $\omega \in]0,2[$ beliebig, aber fest gewählt. Zeigen Sie, dass dann

$$\rho(K(\omega)) = \max\{|\lambda_1(\mu)|, |\lambda_2(\mu)|\}$$

gilt, wobei $\lambda_1(\mu), \lambda_2(\mu)$ die Lösungen der quadratischen Gleichung aus f) für $\mu = \rho(J)$ sind.

h) Zeigen Sie nun, dass

$$\rho(K(\omega)) = \begin{cases} \omega - 1 & \text{für } \omega_{opt} \leq \omega \leq 2 \\ 1 - \omega + \frac{1}{2}\omega^2\mu^2 + \omega\mu\sqrt{1 - \omega + \frac{1}{4}\omega^2\mu^2} & \text{für } 0 < \omega \leq \omega_{opt} \end{cases}$$

mit $\omega_{opt} = \frac{2}{1+\sqrt{1-\mu^2}}$ und $\mu = \rho(J)$. Skizzieren Sie $\rho(K(\omega))$ beispielhaft.

Hinweis: ω_{opt} ergibt sich als eine der beiden Lösungen der in ω quadratischen Funktion $R(\omega) = 0$, wobei $R(\omega)$ der Radikant der quadratischen Gleichung für λ aus Aufgabe g) ist. Man unterscheide $R(\omega) \geq 0$ und $R(\omega) < 0$.

i) Zeigen Sie folgende Zusammenhänge für die Spektralradien der einzelnen Iterationsverfahren.

$$\begin{aligned} \text{Jacobi-Iteration:} \quad & \rho_J = \mu \\ \text{Gauß-Seidel-Iteration:} \quad & \rho_{GS} = \mu^2 \\ \text{Überrelaxation mit } \omega_{opt}\text{:} \quad & \rho(K(\omega_{opt})) = \omega_{opt} - 1 = \left(\frac{\mu}{1+\sqrt{1-\mu^2}}\right)^2. \end{aligned}$$

Aufgabe 13. (Darstellung der Iterierten) (4 Punkte)

Beweisen Sie folgende Aussage: Die lineare Iteration $x_{m+1} = Gx_m + M^{-1}b$ mit $m \geq 0$ liefert die Iterierten

$$x_m(x_0, b) = G^m x_0 + \sum_{j=0}^{m-1} G^j M^{-1} b.$$

Aufgabe 14. (Fehlerpropagation) (8 Punkte)

Sei x die exakte Lösung von $Ax = b$ und $e_m = x_m - x$ der Iterationsfehler einer linearen Iteration

$$x_{m+1} = Gx_m + M^{-1}b. \qquad (*)$$

a) Zeigen Sie, dass sich der Iterationsfehler als

$$e_{m+1} = Ge_m = G^{m+1}e_0$$

darstellen lässt.

b) Sei G regulär und $\rho(G) < 1$. Zeigen Sie, dass das Verfahren $(*)$ gegen die eindeutige Lösung von $Ax = b$ konvergiert.

Aufgabe 15. (Konvergenz des Gauß-Seidel-Verfahrens) (6 Punkte)

Beweisen Sie mittels Widerspruch, dass das Gauß-Seidel-Verfahren für alle strikt diagonaldominanten Matrizen A konvergiert.

Hinweis: Nehmen Sie an, dass die Iterationsmatrix G_{GS} mindestens einen Eigenwert λ mit $|\lambda| \geq 1$ besitzt und y der zugehörige Eigenvektor zu λ ist. Wieso folgt aus der Eigenwertgleichung, dass die Annahme falsch sein muss?

Gesamtpunktzahl: 42 Punkte