Einführung in die Numerische Mathematik

Wintersemester 2011/12
Prof. Dr. Carsten Burstedde
Jutta Adelsberger, Daniel Wissel

universitätbonn

Übungsblatt 6.

Abgabe am **Dienstag, 29.11.2011**

Aufgabe 16. (Steepest Descent) (12 Punkte)

Betrachten Sie das Verfahren des steilsten Abstiegs (steepest descent) zum linearen Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

wobei $a \gg 1$ eine Konstante sei.

a) Der Startvektor sei $x_0 = (a, 1)^T$. Bestimmen Sie die erste Suchrichtung r_0, den ersten Skalar α_0 sowie die erste Iterierte x_1.

b) Sei $x_k = (x_k^1, x_k^2)^T$ die k-te Iterierte. Zeigen Sie $x_{k+1}^1 = \rho x_k^1$ und $x_{k+1}^2 = -\rho x_k^2$. Wie lautet ρ?

c) Bestimmen Sie die Kondition $\kappa_2(A)$ der Matrix A. Zeigen Sie, dass die Abschätzung

$$\left\| x_k - A^{-1}b \right\|_A \leq \left(\frac{\kappa_2(A) - 1}{\kappa_2(A) + 1} \right)^k \left\| x_0 - A^{-1}b \right\|_A$$

der Konvergenzgeschwindigkeit scharf ist, d.h. dass in der Ungleichung auch Gleichheit vorkommen kann.

d) Zeigen Sie $r_{k+1}^T r_k = 0$ und $r_{k+2} = \beta_k r_k$. Wie lautet β_k?

e) Der Winkel φ zweier Vektoren x und y gemessen in der Energienorm ist durch

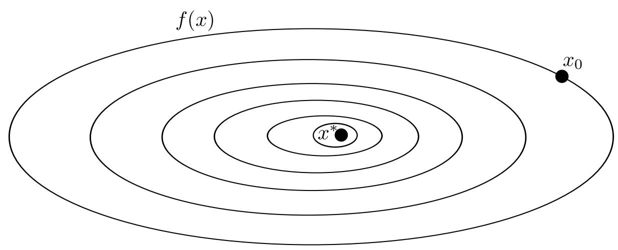
$$\cos\varphi = \frac{x^T A y}{\|x\|_A \|y\|_A} \text{ mit } \|x\|_A = \sqrt{x^T A x}$$

definiert. Zeigen Sie, dass in der Energienorm r_k und r_{k+1} fast parallel sind, d.h. r_k und r_{k+1} schließen einen kleinen Winkel φ ein.

Aufgabe 17. (Steepest Descent) (10 Punkte)

Betrachten Sie das Verfahren des steilsten Abstiegs zur Minimierung des quadratischen Funktionals $f(x) = \frac{1}{2}x^T A x - b^T x$, wobei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch und positiv definit ist.

a) Wieso entspricht die Lösung von $Ax = b$ der Minimierung von $f(x)$? Was bedeutet das für die Suchrichtung? Skizzieren Sie das Verfahren des steilsten Abstiegs mit Startwert x_0 anhand des dargestellten Höhenprofils einer stetigen konvexen Funktion f mit globalem Minimum x^*. Eine Ellipse bzw. eine Höhenlinie entspricht dabei $f(x) = \text{const}$.



b) Bei Steepest Descent wird im k-ten Schritt $\alpha_k = r_k^T r_k / (r_k^T A r_k)$ berechnet, also für jeden Schritt i.a. ein anderer Skalar. Zeigen Sie, dass $\alpha_k \geq \alpha^* = \frac{1}{\lambda_{\max}(A)}$.

c) Zeigen Sie, dass auch die Wahl einer festen Schrittweite α mit $0 < \alpha < 2\alpha^*$ Konvergenz garantiert.

Aufgabe 18. (Fehler in der Energienorm) (4 Punkte)

Sei $x^* \in \mathbb{R}^n$ die exakte Lösung von $Ax = b$ mit der symmetrischen positiv definiten Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sowie $\tilde{x}$ eine berechnete Näherung. Der Fehler ist dann $e := x^* - \tilde{x}$.

a) Zeigen Sie, dass $\|r\|_2 = \|e\|_{A^2}$, wobei $r = b - A\tilde{x}$ das Residuum ist.

b) Da e i.a. unbekannt ist (wegen unbekannter exakter Lösung x^*), kann $\|e\|_2$ i.a. nicht berechnet werden. Ist $\|e\|_A$ berechenbar? Ist $\|e\|_{A^2}$ berechenbar?

Programmieraufgabe 5. (Iterationsverfahren) (24 Punkte)

a) Schreiben Sie je eine Routine, die ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$ iterativ nach der Methode von Jacobi, Gauß-Seidel und SOR löst, wobei für den Relaxationsparameter von SOR $0 < \omega < 2$ gelte. Testen Sie Ihre drei iterativen Löser an der Beispielmatrix von Programmieraufgabe 1 und der dort angegebenen rechten Seite. Wählen Sie jeweils als Startiterierte den Vektor $x_0 = (0, \ldots, 0)^T$.
Die Ausgabe des Programms soll den jeweiligen Lösungsvektor sowie die Anzahl der nötigen Iterationen beinhalten, bis das Verfahren konvergiert ist. Dabei soll die Iteration abgebrochen werden, falls für das Residuum

$$\|Ax_k - b\|_2 \leq 10^{-10} \|Ax_0 - b\|_2$$

gilt.

b) Für den optimalen Relaxationsparameter des SOR-Verfahrens gilt

$$\omega_{opt}(A) = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho^2(G_J)}}$$

mit $G_J := D^{-1}(E + F)$ für die Zerlegung von $A = D - E - F$, wobei $D = \operatorname{diag}(A)$, E linke untere und F rechte obere Dreiecksmatrix ist.
Schreiben Sie eine Routine zur Bestimmung von ω_{opt} und verwenden Sie dabei die Power Method (s. Vorlesung Satz 2.0), um den maximalen Eigenwert und somit den Spektralradius von G_J zu berechnen. Verwenden Sie ω_{opt} in Ihrem Programm aus Teilaufgabe a) und geben Sie ihn für obige Beispielmatrix aus.

Abgabe **Di 6.12.** und **Do 8.12.** im **CIP-Pool** (`www.iam.uni-bonn.de/pcpool/`). Ab Di 29.11. hängt eine Terminliste für diese beiden Tage aus; bitte tragen Sie sich in 2–3er Gruppen ein. Die Liste befindet sich Mo–Mi im CIP-Pool der Wegelerstraße, Do–Fr im CIP-Pool der Endenicher Allee.

Gesamtpunktzahl: 26 + 24 Punkte