Einführung in die Numerische Mathematik

Wintersemester 2011/12
Prof. Dr. Carsten Burstedde
Jutta Adelsberger, Daniel Wissel

universitätbonn

Übungsblatt 8.

Abgabe am **Dienstag, 13.12.2011**

Aufgabe 23. (GMRES) (4 Punkte)

Wenden Sie das GMRES-Verfahren auf das System $Ax = b$,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

mit Startvektor $x_0 = 0$ an und untersuchen Sie die Konvergenz.

Aufgabe 24. (Lanczos-Verfahren) (12 Punkte)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch mit einem einfachen Eigenwert λ_1 und zugehörigen Eigenvektor r_1. Zeigen Sie, dass die tridiagonale Matrix T_m aus der Lanczos-Zerlegung nach Abbruch mit $\beta_{m+1} = 0$ keinen Eigenwert gleich λ_1 hat, falls der Startvektor v_1 senkrecht auf r_1 steht.

Hinweise: Zeigen Sie dazu zunächst, dass das Lanczos-Verfahren für die Matrix A und Startvektor v_1 dieselbe Tridiagonalmatrix T_m liefert wie für die Matrix U^TAU und Startvektor U^Tv_1, falls U orthogonal ist. Beachten Sie weiter, dass A diagonalisierbar ist. Wie sehen die entsprechenden Lanczos-Vektoren aus? Diagonalisieren Sie schließlich T_m und nehmen Sie an, dass T_m doch λ_1 als Eigenwert hätte.

Aufgabe 25. (CG-Verfahren) (18 Punkte)

Das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit einer symmetrisch positiv definiten Matrix A soll durch Minimierung der quadratischen Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x^TAx - b^Tx$ mit dem CG-Verfahren gelöst werden. Hierbei seien x_k die Näherungslösungen, p_k die konjugierten Suchrichtungen und $r_k := Ax_k - b$ die Residuen, wobei $r_{k-1} \neq 0$ in Iteration k gelte. Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften des CG-Verfahrens:

a) $\langle p_i, r_k\rangle = 0$ für $i < k$.

b) $p_{k-1} \neq 0$ in Iterationsschritt k.

c) $V_k := \operatorname{span}\{r_0, Ar_0, \dots, A^{k-1}r_0\} = \operatorname{span}\{r_0, r_1, \dots, r_{k-1}\} = \operatorname{span}\{p_0, p_1, \dots, p_{k-1}\}$.

d) Die r_i stehen senkrecht aufeinander, d.h. $\langle r_i, r_j\rangle = 0$ für $0 \le i < j$.

e) Die p_i sind paarweise A-orthogonal, d.h. $\langle p_i, p_j\rangle_A = 0$ für $0 \le i < j$.

f) $f(x_k) = \min\limits_{z\in V_k} f(x_0 + z)$.

Hinweis: Verwenden Sie die Zusammenhänge aus Aufgabe 22.

Programmieraufgabe 6. (CG-Verfahren) (25 Punkte)

a) Implementieren Sie das CG-Verfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme $Ax = b$ mit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch positiv definit, wobei die Startnäherung stets der Nullvektor $x_0 = 0 \in \mathbb{R}^n$ sei. Als Abbruchkriterium gelte

$$\|Ax_k - b\|_2 \leq 10^{-10}\|Ax_0 - b\|_2.$$

Überprüfen Sie im Verlauf der Iteration, ob die berechneten Suchrichtungen tatsächlich A-orthogonal sind.
Hinweis: Beachten Sie, dass Sie für die Durchführung eines CG-Iterationsschrittes nur die Operation $x \mapsto Ax$ benötigen und nicht explizit auf die Matrix A zugreifen müssen.

b) Prüfen Sie, ob das CG-Verfahren für die Lösung von $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 8 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 7 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 8 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 2 & 7 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -13 \\ 6 \\ 3 \\ -12 \\ 19 \end{pmatrix}$$

anwendbar ist und geben Sie gegebenenfalls die Lösung an.

c) Bestimmen Sie für $n = 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64,\ 128,\ 256,\ 512,\ 1024,\ 2048,\ 4096, \ldots$ die Lösung der Gleichungssysteme $Ax = b$ und $Ax = c$, wobei $A := (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit

$$a_{ij} = \begin{cases} 2 & \text{falls } i = j \\ -1 & \text{falls } |i-j| = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und $b := (b_i) \in \mathbb{R}^n$ mit

$$b_i = 1 \quad \forall\, i = 1, \ldots, n$$

bzw. $c := (c_i) \in \mathbb{R}^n$ mit

$$c_i = \sin(i) \quad \forall\, i = 1, \ldots, n.$$

Geben Sie jeweils die Anzahl der Iterationsschritte und die Norm des letzten Residuums an. Wie verhält sich die Kondition der Matrizen mit steigender Dimension n?
Hinweis: Nutzen Sie für die Konditionsberechnung Aufgabe 9.

> Abgabe **Mi 21.12.** und **Do 22.12.** im **CIP-Pool** (`www.iam.uni-bonn.de/pcpool/`). Ab Mi 14.12. hängt eine Terminliste für diese beiden Tage aus; bitte tragen Sie sich in 2–3er Gruppen ein. Die Liste befindet sich Mo–Mi im CIP-Pool der Wegelerstraße, Do–Fr im CIP-Pool der Endenicher Allee.

Gesamtpunktzahl: 34 + 25 Punkte