Einführung in die Numerische Mathematik

Wintersemester 2011/12
Prof. Dr. Carsten Burstedde
Jutta Adelsberger, Daniel Wissel

universitätbonn

Übungsblatt 9.

Abgabe am **Dienstag, 20.12.2011**

Aufgabe 26. (Chebyshev-Polynome) (15 Punkte)

Die aus der Vorlesung bekannten Chebyshev-Polynome lauten für $t \in [-1, 1]$

$$C_k(t) = \cos(k \cdot \arccos(t)).$$

a) Berechnen Sie $C_0(t)$ und $C_1(t)$ und beweisen Sie die Rekursionsformel

$$C_{k+1}(t) = 2tC_k(t) - C_{k-1}(t) \text{ für } k = 1, 2, \ldots$$

Hinweis: Verwenden Sie das Additionstheorem

$$\cos(a) + \cos(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right).$$

b) Sei $\hat{\mathbb{P}}_k := t^n + \mathbb{P}_{k-1}$ die Menge der monomischen (d.h. mit höchstem Koeffizient 1) Polynome vom Grad k. Zeigen Sie, dass $\varepsilon_k C_k \in \hat{\mathbb{P}}_k$ mit $\varepsilon_0 = 1$ und $\varepsilon_k = 2^{1-k}$ für $k \geq 1$.

c) i sei die imaginäre Einheit. Beweisen Sie die Identität

$$\frac{1}{2}\left[\left(t + \sqrt{t^2-1}\right)^k + \left(t + \sqrt{t^2-1}\right)^{-k}\right] = \frac{1}{2}\left[\left(t + \sqrt{t^2-1}\right)^k + \left(t - \sqrt{t^2-1}\right)^k\right]$$
$$= \cos(k \cdot \arccos(t)).$$

Hinweis: Verwenden Sie, dass $\sqrt{t^2-1} = i\sqrt{1-t^2}$.
Bemerkung: Diese Polynomdarstellung der Chebyshev-Polynome gilt auch für $t \in \mathbb{R}$.

d) Sei $\lfloor a \rfloor$ für $a \in \mathbb{R}$ die größte ganze Zahl $\tilde{a}$ mit $\tilde{a} \leq a$. Zeigen Sie

$$C_k(t) = \sum_{j=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} (-1)^j \binom{k}{2j} t^{k-2j}(1-t^2)^j.$$

e) Sei $t = \frac{r^2+1}{r^2-1}$ mit $r > 1$. Zeigen Sie, dass

$$C_k(t) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{r+1}{r-1}\right)^k + \left(\frac{r-1}{r+1}\right)^k\right]$$

und insbesondere

$$\frac{1}{C_k\left(\frac{r^2+1}{r^2-1}\right)} < 2\left(\frac{r-1}{r+1}\right)^k.$$

Aufgabe 27. (Zeilenäquilibrierung) (6 Punkte)

Unter einer *Zeilenskalierung* versteht man die Multiplikation eines Gleichungssystems mit einer Diagonalmatrix $D = \operatorname{diag}\{d_i\}$ von links, also $Ax = b \to DAx = Db$. Eine solche Skalierung wird mit dem Ziel durchgeführt, die Kondition des Problems zu verringern, so dass also möglichst $\kappa(DA) \leq \kappa(A)$ gilt. Eine *Zeilenäquilibrierung* ist eine spezielle Form der Zeilenskalierung mit

$$d_i = \frac{\|A\|_\infty}{\sum_j |a_{ij}|}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ wird im folgenden als regulär vorausgesetzt, und $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sei die Diagonalmatrix zur Zeilenäquilibrierung von A.

a) Zeigen Sie, dass
$$\kappa_\infty(DA) \leq \kappa_\infty(A).$$

b) Zeigen Sie außerdem für jede beliebige Diagonalmatrix $C = \operatorname{diag}\{c_i\} \in \mathbb{R}^{n\times n}, c_i \neq 0$,
$$\kappa_\infty(DA) \leq \kappa_\infty(CA).$$

Bemerkung: Die Zeilenäquilibrierung liefert also die kleinste durch Skalierung zu erreichende Konditionszahl bezüglich der ∞-Norm.

Aufgabe 28. (Finite Differenzen) (11 Punkte)

Die erste Ableitung $\frac{\partial}{\partial x}$ einer Funktion $u(x)$ kann wie folgt diskretisiert werden:

$$\begin{aligned}
(\delta^+u)(x) &= \frac{1}{h}[u(x+h) - u(x)] && \text{Vorwärtsdifferenz,}\\
(\delta^-u)(x) &= \frac{1}{h}[u(x) - u(x-h)] && \text{Rückwärtsdifferenz,}\\
(\delta^0u)(x) &= \frac{1}{2h}[u(x+h) - u(x-h)] && \text{Symmetrische Differenz.}
\end{aligned}$$

a) Leiten Sie eine Differenzenformel für $\delta^+\delta^-$ her und zeigen Sie, dass $\delta^-\delta^+ = \delta^+\delta^-$. Dabei bedeutet $\delta^+\delta^-$, dass auf das Ergebnis von δ^- der Operator δ^+ angewandt wird.

b) Zeigen Sie, dass δ^+ tatsächlich die erste Ableitung diskretisiert.
Hinweis: Wählen Sie die Notation $u_i := u(x_i), u_{i\pm1} := u(x_i \pm h)$ und verwenden Sie die Taylorreihe im Entwicklungspunkt x_i
$$u(x_i + h) = \sum_{\nu=0}^{\infty} u^{(\nu)}(x_i)\frac{1}{\nu!}h^\nu.$$

c) Zeigen Sie, dass $\delta^+\delta^-$ eine Diskretisierung für die zweite Ableitung $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ ist. Gilt dies auch für $\delta^+\delta^0, \delta^-\delta^0, \delta^0\delta^+$ und $\delta^0\delta^-$?

Gesamtpunktzahl: 32 Punkte