Wiederholungsaufgaben
Algorithmische Mathematik 2

Sommersemester 2012
Prof. Dr. Beuchler
Markus Burkow

Übungsaufgaben

Aufgabe 1. (Jacobi-Verfahren)

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $\mathbf{Ax} - \mathbf{b} = \mathbf{0}$ für

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

1. Berechnen Sie für den Startwert $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$ die ersten beiden Iterationswerte $\mathbf{x}^{(1)}$ und $\mathbf{x}^{(2)}$ des Jacobi–Verfahrens.

2. Geben Sie für das Jacobi-Verfahren eine scharfe a-priori Abschätzung für den Fehler
$$\| \mathbf{x}^{(10)} - \mathbf{x}^* \|_p$$
für $p = 2$ und $p = \infty$ an. ($\mathbf{x}^*$ bezeichne die exakte Lösung).

3. Wie viele Schritte müssen mindestens mit dem Jacobi-Verfahren ausgeführt werden, so dass
$$\| \mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^* \|_2 < 0.1?$$

4. Wie muss τ im Richardson-Verfahren gewählt werden,
   - um Konvergenz zu erhalten?
   - um optimale Konvergenz zu erhalten?

Lösung.

1. Iterationsmatrix: $J = -D^{-1}(L+R) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$

   Iterationsvorschrift: $x^{(k+1)} = Jx^{(k)} + D^{-1}b = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} x^{(k)} + \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \\ 2 \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix}$

   $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $x^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \\ 2 \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix}$, $x^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{7}{4} \\ 3 \\ 4 \\ \frac{7}{2} \end{bmatrix}$

2. J besitzt die Eigenwerte (VL) $\lambda_i = 2\sin^2 \frac{\pi i}{10} - 1 = \cos \frac{\pi i}{5}$, $i = 1, 2, 3, 4$. Also ist $\| J \|_2 = \cos \frac{\pi}{5} = q < 1$. Damit folgt nach der VL
$$\| x^{(10)} - x^* \|_2 \leq \frac{q^{(10)}}{1-q} \| x^{(1)} - x^{(0)} \|_2 = \frac{q^{(10)}}{1-q} \frac{3}{2}\sqrt{6}.$$

Mit

$$\| x \|_\infty \leq \| x \|_2$$

folgt die Abschätzung.

3. Umstellen der Formel

$$\| x^{(k)} - x^* \|_2 \leq \frac{q^{(k)}}{1-q} \frac{3}{2} \sqrt{6} < 0.1$$

nach k.

4. $\tau = \frac{1}{2}$.

□

Aufgabe 2. (Iterative Verfahren)

Gegeben sei das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 89.3 & -33.7 & 17.1 \\ -7.0 & 18.6 & 26.2 \\ 27.9 & 103.5 & -6.4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.14 \\ -0.17 \\ 2.1 \end{pmatrix}.$$

1. Überprüfen Sie, daß sowohl die Zeilen- als auch die Spaltensummennorm der Iterationsmatrix größer als 1 ist und somit beide keine Konvergenz für das Jacobiverfahren anzeigen!

2. Kann man das Gleichungssystem so umformen, daß das Jacobiverfahren sicher konvergiert?

Lösung.

1. klar (Nachrechnen)

2. Tausche 2. und 3. Zeile.

□

Aufgabe 3. (Stationäre Verteilung)

Gegeben sei die folgende nichtnegative Matrix A:

$$A = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0.0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1.0 & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix}$$

1. Wann heißt eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ stochastisch?

2. Ist A eine stochastische Matrix? Ist A irreduzibel und aperiodisch?

3. Bestimmen Sie alle stationären Verteilungen der zugehörigen Markowkette!

4. Berechnen Sie, falls existent, $\lim_{k\to\infty} A^k$.

Lösung.

1.

2. ja, ja, ja.

3. Nach VL ist p durch $p^\top(A-I) = 0$ und $p^\top e = 1$ mit $e = [1 \;\; 1 \;\; 1]^\top$ eindeutig bestimmt:

$$p = \begin{bmatrix} 4/8 \\ 3/8 \\ 1/8 \end{bmatrix}$$

4. Nach VL $pe^\top$.

$\square$

Aufgabe 4. Gegeben sei die folgende nichtnegative Matrix T:

$$T = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.2 & 0.3 & 0.1 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0.1 & 0.6 \\ 0.4 & 0.2 & 0 & 0.4 \end{bmatrix}$$

1. Man zeichne den Übergangsgraphen der zugehörigen Markowkette.
2. Ist die Matrix T primitiv?
3. Man bestimme alle betragsgrößten Eigenwerte von T und gebe ihre algebraische und geometrische Vielfachheit an.

Lösung.

1.
2. ja, denn $T^2 > 0$.
3. Nach Perron-Frobenius ist dieser eindeutig durch 1 bestimmt und hat algebraische und geometrische Vielfachheit 1.

$\square$

Aufgabe 5. (Cholesky)

Gegeben sei die Matrix

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 4 & 17 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}.$$

1. Zeigen Sie, dass B symmetrisch und positiv definit ist!
2. Bestimmen Sie die Cholesky-Zerlegung von B!
3. Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $Bx = c$ mit $c = [1\ 4\ 3]^\top$.
4. Welchen asymptotischen Aufwand besitzt die Berechnung der Cholesky-Zerlegung einer vollbesetzten $n \times n$ Matrix B?

Lösung.

1. Alle Hauptminoren sind positiv. (Nachrechnen)
2. $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
3. $$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -17 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$
4. $\mathcal{O}(n^3)$.

□

Aufgabe 6. (LR-Zerlegung)

Berechnen Sie die LR-Zerlegung folgender Matrix G und deren Determinante $det(G)$:

$$G = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 6 & 3 \\ 9 & 10 & 6 \end{bmatrix}$$

Lösung.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}; U = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; det(G) = 6.$$

□

Aufgabe 7. (Matrix-Normen)

1. Sei $Ax = b$ und $A(x + \Delta x) = b + \Delta b$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch.
   (a) Zeigen Sie $\dfrac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \kappa(A) \dfrac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$!
   (b) Zeigen Sie für die Norm $\| \, . \, \|_2$, daß diese Abschätzung scharf ist!
   (Wie müssten bei gegebener Matrix A die Vektoren b und Δb gewählt werden, damit in der angegebenen Abschätzung das Gleichheitszeichen gilt?)
2. Zeigen Sie, dass der Spektralradius keine Matrixnorm ist.

Lösung.

1. (a) Vorlesung.
   (b) Wir wissen, dass es eine orthogonale Matrix Q der Eigenvektoren v_i und eine Diagonalmatrix D der Eigenwerte λ_i mit $|\lambda_1| > \ldots > \||\lambda_n|$ gibt mit $A = Q^\top DQ$. Mit $x = v_n$ und $\Delta x = v_1$ folgt die Behauptung.
2. Die Matrix $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ verletzt die Definitheit, denn $\rho(A) = 0$, aber $A \neq 0$.

□

Aufgabe 8. (Polynom-Interpolation I)

Bestimmen Sie das Interpolationspolynom höchstens 2. (3.) Grades, das an den Stellen $x = -1, 0, 2 \; (, 1)$ die Werte von $f(x) = 2^x$ annimmt, mit Hilfe der Lagrangeschen und der Newtonschen Formel!
Berechnen Sie damit näherungsweise $\sqrt{2}$.
Schätzen Sie den Fehler für diese Näherung und für das gesamte Interpolationsintervall ab!

Lösung.

1. Lagrange ist klar. Newton: (mit div. Differenzen)

$$p(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(t+1) + \frac{1}{3}t(t+1) + \left(\frac{1}{12}t(t+1)(t-2)\right)$$

2. Fehlerabschätzung für $x = \frac{1}{2}$ liefert nach VL $\frac{3}{4}(\ln 2)^3$ bzw. $\frac{3}{32}(\ln 2)^4$.

□

Aufgabe 9. (Polynom-Interpolation II)

Gegeben seien Stützstellen $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$. Definieren Sie die

- Newton'sche Interpolationspolynome
- Lagrange Interpolationspolynome

zu diesen Stützstellen. Gegeben sei eine unendlich oft differenzierbare Funktion $f : [-1,1] \mapsto \mathbb{R}$. $p \in \mathcal{P}_{n-1}$ sei das Interpolationspolynom mit

$$p(x_i) = f(x_i), \quad i = 1 \ldots, n.$$

Wie müssen die Stützstellen $-1 \leq x_1 < x_2 < \ldots < x_n \leq 1$ gewählt werden, so dass

$$\max_{t \in [-1,1]} |f(t) - p(t)|$$

minimal wird?

Lösung. Nehme die Nullstellen des Tschebyscheffpolynoms $T_n(t) = \cos(n \arccos t)$. □

Aufgabe 10. (Spline-Interpolation)

Gegeben seien Stützstellen $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$.

- Was ist ein Spline der Ordnung k zu diesen Stützstellen?
- Lösen Sie graphisch folgendes Interpolationsproblem mit linearer Spline-Interpolation

	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$
x_i	0	1	2	3
y_i	0	2	3	7.

Gegeben sei eine unendlich oft differenzierbare Funktion $f : [-1,1] \mapsto \mathbb{R}$. $s \in \mathcal{S}_{4,x}$ sei der interpolierende kubische Spline mit

$$s(x_i) = f(x_i), \quad i = 1 \ldots, n.$$

und $s''(x_1) = s''(x_n) = 0$. Geben Sie eine scharfe Fehlerabschätzung für

$$\sqrt{\int_a^b (f(t) - s(t))^2 \, \mathrm{d}t}$$

an, falls $x_i = a + ih$, $i = 1, \ldots, n$, $h = \frac{b-a}{n-1}$.

Lösung. $h^4 \parallel f^{(4)} \parallel_{L_2}$ □

Aufgabe 11. (Trigoniometrische Interpolation)

1. Man gebe die Fouriermatrix F_n der Dimension n an.
2. Man löse das LGS $F_4\mathbf{x} = \mathbf{b}$ für $\mathbf{b} = [1\ 2\ 5\ -2]^\top$.
3. Mit welchem maximalen asymptotischen Aufwand kann eine Multiplikation $F_n\mathbf{x}$ mit $n = 2^k$ durchgeführt werden?

Lösung.

1.

2. Nach der VL ist $F_n^* F_n = nI_n$. Damit folgt $\mathbf{x} = \frac{1}{2} F_4^* \mathbf{b}$, also $\mathbf{b} = [3, -2-2i, 3, -2+2i]^\top$.
3. $\mathcal{O}(n \log_2 n)$

□

Aufgabe 12. (Numerische Integration)

- Berechnen Sie das Integral $\int_0^1 (1+t^3)\, dt$ approximativ mit der Trapezregel, der Simpsonregel und der 3/8-Regel.
- Man gebe eine dazu jeweils Fehlerabschätzung an!
- Berechnen Sie das Integral $\int_0^1 t^3\, dt$ numerisch nun mit einer verallgemeinerten Trapezregel mit der Unterteilung in 2 Intervalle $[0, 0.5]$ und $[0.5, 1]$ und schätzen Sie erneut den Fehler ab.
- Gewinnen Sie aus den Werten für die Trapezregel mit 1 und 2 Intervallen die Romberg-Beschleunigung.
- Benutzen Sie eine Fehlerabschätzungen zur Ermittlung einer Mindestzahl der Teilintervalle der verallgemeinerten Trapezregel, die man benötigt, um $\int_0^1 t^3\, dt$ oder $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(t)\cos(t)\, dt$ mit der Genauigkeit 10^{-5} zu berechnen.

Lösung.

1. 1.5, 1.25, 1.25
2. Trapezregel mit VL (Satz 5.32): $\frac{1}{2}$, Simpson: $\frac{1}{32}$ (tat. 0), 3/8-Regel 0.
3. Wert: $\frac{21}{16}$, Fehler nach Satz 5.33: $\frac{1}{8}$
4. 1.25
5.

□

Aufgabe 13. (Fixpunktverfahren)

Gegeben sei die Gleichung $x^3 = 5x - 1$. Durch grafische Darstellung und/oder Bisektion hat man festgestellt, daß die 3 Nullstellen etwa bei -2.35, 0.20 und 2.10 liegen. Der genaue Wert soll nun durch Fixpunktiteration $x_{k+1} := \varphi(x_k)$ ermittelt werden.

1. Geben Sie verschiedene Fixpunktiterationen an.
2. Welche Konvergenzeigenschaften sind von den zu den Fixpunktgleichungen gehörigen Iterationsverfahren $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ in der Umgebung der drei Nullstellen zu erwarten?
3. Mit $x_0 = 2.10$ sind 2 Iterationsschritte einer konvergenten Fixpunktiteration durchzurechnen. und gebe eine Fehlerabschätzung für $|x_7 - x^*|$ an.

Lösung. extra Blatt □

Aufgabe 14. (Fixpunktgleichungen)

Bei gegebenem $a \in \mathbb{R}$ $(a > 0)$ ist $x^* = \sqrt{a}$ Lösung der Fixpunktgleichungen

$$x = \varphi(x) = \frac{a}{x} \qquad (1)$$

$$x = \varphi(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right) \qquad (2)$$

Man zeige:

1. Das durch (1) festgelegte Iterationsverfahren ist für jeden Startwert $x_0 > 0$ ($x_0 \neq \sqrt{a}$) divergent.

2. Die (2) zugeordnete Iteration konvergiert für alle $x_0 > 0$ gegen $\sqrt{a}$, wobei $\sqrt{a} \leq \ldots \leq x_n \leq x_{n-1} \leq \ldots \leq x_0$.

3. Man zeige, daß das Verfahren (2) mit der Ordnung 2 konvergiert!

Lösung. Siehe Vorlesung, Satz 1.6. □

Aufgabe 15. (Newton-Verfahren)

Gesucht ist die Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^2 + y^2 + 0.6y - 0.16 &&= 0 \\ g(x,y) &= x^2 - y^2 + x - 1.6y - 0.14 &&= 0 \end{aligned}$$

1. Schreiben Sie den Ansatz für das Newton-Verfahren auf!

2. Man berechne für den Startwert $[0,0]^\top$ eine Iteration des Newton-Verfahrens?

Lösung.

□

Aufgabe 16. (Newton-Verfahren)

Eine Funktion $F : D \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ heißt konvex, falls für alle $x, y \in D$ und $\lambda \in [0,1]$ gilt:

$$F(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

Es sei nun $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ differenzierbar, streng monoton wachsend und konvex. Weiters habe f eine Nullstelle x^* und für gegebene $z^{(0)} < x^* < x^{(0)}$ sei $x^{(k)}$ die Folge der Newton-Iterierten und

$$z^{(k+1)} = z^{(k)} - \frac{f(z^{(k)})}{f'(x^{(k)})}.$$

Man zeige, dass die Folge $\{z^{(k)}\}_k$ monoton wachsend gegen x^* konvergiert.

Lösung. Indirekt zeigt man zunächst (Differenzquotient für ein fixes $h > 0$), dass $f'(x)$ monoton wachsend ist. Daraus folgt sofort (1. MWS der Differentialrechnung), dass $\{x^{(k)}\}_k$ monoton fallend ist und nach unten durch x^* beschränkt ist. Analog folgt mit dem 1. MWS der Differentialrechnung, dass $\{z^{(k)}\}_k$ monoton wachsend ist und nach oben durch x^* beschränkt ist. Damit ist $\{z^{(k)}\}_k$ konvergent. Da f streng monoton ist, ist x^* einzige Lösung der Fixpunktgleichung. □