Klausur zum Modul Ingenieurmathematik I (B01) **03 August 2012**
für den Bachelorstudiengang Geodäsie und Geoinformation

In der Klausur können insgesamt 100 Punkte erreicht werden.
Zum Bestehen sind mindestens 50 Punkte erforderlich.

Prüfer: Dr. Christian Rieger, Dr. Martin Lenz

Klausurdauer: 180 Minuten

Bitte Namen, Vornamen und Matrikel-Nummer einsetzen.

Name: ....

Vorname: ....

Matrikel-Nr.: ....

Bitte Schlüsselwort (zur Veröffentlichung der Klausurergebnisse im Netz) eintragen.

Schlüsselwort: ....

Aufgabe	1	2	3	4	5	6
Punkte	/10	/10	/10	/10	/10	/10
Aufgabe	7	8	9	10		$\sum$
Punkte	/10	/10	/10	/10		/100

Note: Viel Erfolg!

Aufgabe 1: Zeigen Sie

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

für $q \neq 1$.

(10 Punkte)

LÖSUNG:

IA: $n = 0$: $\sum_{k=0}^{0} q^k = q^0 = 1 = \dfrac{1-q^1}{1-q}$ ✓

IV: Gilt für n: $\sum_{k=0}^{n} q^k = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

IS:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} q^k = \left(\sum_{k=0}^{n} q^k\right) + q^{n+1} &\overset{IV}{=} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + q^{n+1} \\ &= \frac{1-q^{n+1}+(1-q)q^{n+1}}{1-q} = \frac{1-q^{n+2}}{1-q} \quad ✓\end{aligned}$$

Aufgabe 2: Konvergieren die Folgen $(a_n)_n$? Geben Sie gegebenenfalls den Grenzwert an.

a) $a_n = n\left(2 - \sqrt{4 - \frac{1}{n}}\right)$

b) $a_n = \dfrac{n^2 - \sin(n) + 3}{6n^2 + \cos(n) - 1}$

(10 Punkte)

Lösung:

a)

$$n\left(2 - \sqrt{4 - \frac{1}{n}}\right) = \frac{n\left(2 - \sqrt{4 - \frac{1}{n}}\right)\left(2 + \sqrt{4 - \frac{1}{n}}\right)}{2 + \sqrt{4 - \frac{1}{n}}}$$
$$= \frac{n\left(4 - \left(4 - \frac{1}{n}\right)\right)}{2 + \sqrt{4 - \frac{1}{n}}} = \frac{n\frac{1}{n}}{2 + \sqrt{4 - \frac{1}{n}}} = \frac{1}{2 + \sqrt{4 - \frac{1}{n}}}$$

Es folgt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2 + \sqrt{4 - \frac{1}{n}}} = \frac{1}{2 + \sqrt{4}} = \frac{1}{4}$$

b)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 - \sin(n) + 3}{6n^2 + \cos(n) - 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \frac{\sin(n)}{n^2} + \frac{3}{n^2}}{6 + \frac{\cos(n)}{n^2} - \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{6}\ ,$$

weil $\left|\dfrac{\sin(n)}{n^2}\right| \le \dfrac{1}{n^2} \to 0$ und $\left|\dfrac{\cos(n)}{n^2}\right| \le \dfrac{1}{n^2} \to 0$ wenn $n \to \infty$.

Aufgabe 3: a) Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$x = \cos x$$

genau eine Lösung in $[0, \pi]$ hat.

b) Geben Sie das Newton-Verfahren zur Bestimmung dieser Lösung an.

c) Geben Sie die ersten zwei Schritte des Newton-Verfahrens mit Startwert $x_0 = \frac{\pi}{2}$ an.

(10 Punkte)

LÖSUNG: Lösungen der Gleichung sind Nullstellen von f.

a)
- $f(x) = x - \cos(x)$ stetig auf $[0, 1]$
- $f(0) = -1 < 0$ und $f(1) = 1 - \cos(1) > 0 \Rightarrow$ es gibt eine Nullstelle in $(0, 1)$ (Zwischenwertsatz)
- $f'(x) = 1 + \sin(x) > 0$ auf $(0, 1) \Rightarrow f$ streng monoton wachsend $\Rightarrow$ es gibt *genau* eine Nullstelle

b) $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \dfrac{x_n - \cos(x_n)}{1 + \sin(x_n)}$

c)

d) i) $x_0 = \frac{\pi}{2}$

ii) $x_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\frac{\pi}{2} - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}{1 + sin\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{\pi}{2} - \frac{\frac{\pi}{2}}{1+1} = \frac{\pi}{4}$

iii) $x_2 = \frac{\pi}{4} - \frac{\frac{\pi}{4} - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{1 + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\pi}{4} - \frac{\frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}}{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\pi}{4} - \frac{\frac{\pi}{2} - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}$

$$\sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta)$$
$$\sin(\theta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

Aus der zweiten Gleichung folgt $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$. Damit bekommte man mit der ersten Gleichung $1 = \sin\left(2\frac{\pi}{4}\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)^2$.

Aufgabe 4: a) Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$g(x) = \sin^n(x) - \sin(x^n).$$

b) Ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x\sin(\frac{1}{x}), & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

stetig? Begründen Sie Ihre Antwort.

c) Ist die Funktion f aus Teil b) differenzierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

(10 Punkte)

LÖSUNG:

a) $g'(x) = n\sin^{n-1}(x)\cdot\cos(x) - \cos(x^n)\cdot(nx^{n-1}) = n\left(\sin^{n-1}(x)\cos(x) - x^{n-1}\cos(x^n)\right)$

b) f ist stetig: klar für $x \neq 0$, und für $x = 0$,

$$|x\sin(\tfrac{1}{x})| \leq |x| \xrightarrow[x\to 0]{} 0 \;\Rightarrow\; \lim_{x\to 0} x\sin(\tfrac{1}{x}) = 0 \;\Rightarrow\; \lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$$

c) f ist nicht differenzierbar an $x = 0$:

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{h\sin(\frac{1}{h}) - 0}{h} = \sin(\tfrac{1}{h})$$

aber $\lim_{h\to 0} \sin(\frac{1}{h})$ existiert nicht, weil

$$h_n^{(1)} = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}} \to 0 \;\Rightarrow\; \sin(\tfrac{1}{h_n^{(1)}}) = \sin(2n\pi + \tfrac{\pi}{2}) \to 1$$

$$h_n^{(2)} = \frac{1}{2n\pi - \frac{\pi}{2}} \to 0 \;\Rightarrow\; \sin(\tfrac{1}{h_n^{(2)}}) = \sin(2n\pi - \frac{\pi}{2}) \to -1$$

Aufgabe 5: Gegeben seien die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 - x_2 \\ 2x_1 - x_2 \end{pmatrix}.$$

und die Systeme von Vektoren

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

und

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

a) Zeigen Sie, dass B eine Basis des $\mathbb{R}^2$ und A eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist.

b) Geben Sie die Matrixdarstellung der linearen Abbildung f bezüglich der Basen B und A an.

(10 Punkte)

LÖSUNG:

a) $\dim \mathbb{R}^2 = 2$ und b_1, b_2 linear unabhängig, weil $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$

$\dim \mathbb{R}^3 = 3$ und a_1, a_2, a_3 linear unabhängig, weil $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$

b)

$$\begin{aligned}
& f(b_1) = M_{11}a_1 + M_{21}a_2 + M_{31}a_3 \\
\Rightarrow\ & f\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = M_{11}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + M_{21}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + M_{31}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\Rightarrow\ & \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} M_{11} \\ M_{21} \\ M_{31} \end{pmatrix} \\
\Rightarrow\ & \begin{pmatrix} M_{11} \\ M_{21} \\ M_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ -9 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$f(b_2) = M_{12}a_1 + M_{22}a_2 + M_{32}a_3$$

$$\Rightarrow f\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = M_{12}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} + M_{22}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} + M_{32}\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\1 & -1 & 0\\-1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}M_{12}\\M_{22}\\M_{32}\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}M_{12}\\M_{22}\\M_{32}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\-3\\-6\end{pmatrix}$$

und

$$M_f = \begin{pmatrix}M_{11} & M_{12}\\M_{21} & M_{22}\\M_{31} & M_{32}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3 & -2\\-5 & -3\\-9 & -6\end{pmatrix}$$

Aufgabe 6: Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ Untervektorräume des $\mathbb{R}^n$.
Ist $U \cap V = \{w \,|\, w \in U \text{ und } w \in V\} \subset \mathbb{R}^n$ ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^n$?
Begründen Sie Ihre Antwort.

(10 Punkte)

LÖSUNG: Ja:

i) $0 \in U$, $0 \in V \Rightarrow 0 \in U \cap V$ ✓

ii) für $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt $w \in U \cap V \Rightarrow w \in U$ und $w \in V \Rightarrow \lambda w \in U$, $\lambda w \in V \Rightarrow \lambda w \in U \cap V$ ✓

iii) $w, w' \in U \cap V \Rightarrow w, w' \in U$ und $w, w' \in V \rightarrow w + w' \in U$ und $w + w' \in V \Rightarrow w + w' \in U \cap V$ ✓

Aufgabe 7: Gegeben ist die Ebene

$$E = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \ : \ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

a) Bestimmen Sie die Normalform von E, d.h. einen Vektor $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^3$ und eine Zahl $d \in \mathbb{R}$, so dass $E = \{\mathbf{x} \ : \ \mathbf{n} \cdot \mathbf{x} - d = 0\}$.

b) Prüfen Sie, ob der Punkt $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ in der Ebene liegt.

c) Geben Sie die Gleichung der Geraden an, die senkrecht zu E ist und durch $\mathbf{p}$ verläuft.

(10 Punkte)

Lösung:

a) Der Vektor $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ ist senkrecht zu E und $\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in E$, also

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = 0 \Rightarrow -x - 2y + 2z - 1 = 0$$

ist die Normalform von E.

b) $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -4 + 2 + 2 = 0 \Rightarrow \mathbf{p} \in E.$

c) $\mathbf{x} = \mathbf{p} + \lambda \mathbf{n}$

Aufgabe 8: a) Bestimmen Sie die LR-Zerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 5 & 9 \end{pmatrix}.$$

b) Berechnen Sie die Lösung von $Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = b.$

c) Berechnen Sie $\det A$.

(10 Punkte)

LÖSUNG:

a)

$$\begin{aligned}
A^1 = A = &\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 5 & 9 \end{pmatrix} \\
\Rightarrow L^1 = &\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = L^1 A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} \\
\Rightarrow L^2 = &\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^3 = L^2 A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = R
\end{aligned}$$

und

$$L = (L^1)^{-1}(L^2)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

b) $Ly = b$ und $Rx = y \Rightarrow LRx = b \Rightarrow Ax = b$, also

$$\begin{aligned}
Ly = b \Rightarrow &\begin{pmatrix} y_1 \\ y_1 + y_2 \\ y_1 + 2y_2 + y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
Rx = y \Rightarrow &\begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ 2x_2 + 2x_3 \\ 4x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

c) $\det A = (\det L)(\det R) = (1 \cdot 1 \cdot 1)(1 \cdot 2 \cdot 4) = 8$

Aufgabe 9: Bestimmen Sie die Gleichung des Tangentialraumes an den Graphen der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = e^x \sin y$$

im Punkt $(\tilde{x}, \tilde{y}, f(\tilde{x}, \tilde{y}))$.

(10 Punkte)

LÖSUNG: Definiere $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y) \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x,y) \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow DF = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix}$$

also

$$(x, y, z) \in T_{(\tilde{x}, \tilde{y}, f(\tilde{x}, \tilde{y}))} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ f(\tilde{x}, \tilde{y}) \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ e^{\tilde{x}} \sin \tilde{y} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ e^{\tilde{x}} \cos \tilde{y} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 10: Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

a) Bestimmen Sie die Richtungsableitungen in Richtung $v = (v_1, v_2)$, mit $\|v\| = 1$, im Ursprung.

b) Ist f im Ursprung (total) differenzierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.
Hinweis: Betrachten Sie die Richtungsableitung in Richtung $(1,1)$.

(10 Punkte)

LÖSUNG:

a)

$$\begin{aligned} \partial_v f(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(0+hv_1, 0+hv_2) - f(0,0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \frac{(hv_1)^2(hv_2)}{(hv_1)^2 + (hv_2)^2} \\ &= \frac{v_1^2 v_2}{v_1^2 + v_2^2} = \frac{v_1^2 v_2}{\|v\|^2} = v_1^2 v_2 \end{aligned}$$

b) Nein:
Annahme f sei differenzierbar, dann gilt:
$\nabla f(0,0) = \begin{pmatrix} \partial_{(1,0)} f(0,0) \\ \partial_{(0,1)} f(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Sei $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, dann $\partial_w f(0,0) = 1^2 \cdot 1 = 1$ und

$$\nabla f(0,0) \cdot w = 0 \neq \partial_w f(0,0).$$

Das ist ein Widerspruch.