Probe-Klausur zum Modul Ingenieurmathematik I (B01) **26. Juli 2012**
für den Bachelorstudiengang Geodäsie und Geoinformation

Klausurdauer: 180 Minuten

Bitte Namen, Vornamen und Matrikel-Nummer einsetzen.

Name: ....

Vorname: ....

Matrikel-Nr.: ....

Viel Erfolg!

Aufgabe 1: Zeigen Sie

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x \geq -1$.

(10 Punkte)

LÖSUNG:

IA: $n = 0$: $(1+x)^0 = 1 = 1 + 0x$ ✓

IV: Gilt für n: $(1+x)^n \geq 1 + nx$.

IS: $(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \overset{IV}{\geq} (1+nx)(1+x) = 1+nx+x+nx^2 = 1+(n+1)x+nx^2 \geq 1+(n+1)x$ ✓

Aufgabe 2: Konvergieren die Folgen $(a_n)_n$? Bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

a) $a_n = \sqrt{1+n} - \sqrt{n}$

b) $a_n = \dfrac{n^3 - n^2 + 9}{4n^3 + 7n - 5}$

(10 Punkte)

LÖSUNG: Beide Folgen konvergieren.

a)

$$\begin{aligned} 0 \leq \sqrt{1+n} - \sqrt{n} &= \frac{(\sqrt{1+n} - \sqrt{n})(\sqrt{1+n} + \sqrt{n})}{\sqrt{1+n} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{(1+n) - n}{\sqrt{1+n} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{1+n} + \sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

Es folgt

$$0 \leq a_n \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ und } \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

b) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n^3 - n^2 + 9}{4n^3 + 7n - 5} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{1 - n^{-1} + 9n^{-3}}{4 + 7n^{-2} - 5n^{-3}} = \frac{1}{4}$

Aufgabe 3: a) Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$x = e^x - 2$$

genau eine Lösung in $[0, 2]$ hat.

b) Geben Sie das Newton-Verfahren mit Startwert $x_0 \in (0, 2)$ zur Bestimmung dieser Lösung an.

c) Berechnen Sie die ersten zwei Schritte des Newton-Verfahrens mit Startwert $x_0 = 1$.

(10 Punkte)

LÖSUNG:

a)
- Lösungen der Gleichung sind Nullstellen von $f(x) = e^x - x - 2$. f ist stetig auf $[0, 2]$
- $f(0) = e^0 - 0 - 2 = -1 < 0$ und $f(2) = e^2 - 4 > 0 \Rightarrow$ es gibt eine Nullstelle von f in $(0, 2)$ (Zwischenwertsatz)
- $f'(x) = e^x - 1 > 0$ auf $(0, 2) \Rightarrow f$ ist streng monoton wachsend $\Rightarrow$ es gibt *genau* eine Nullstelle

b) $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \dfrac{e^{x_n} - x_n - 2}{e^{x_n} - 1}$

c)
i) $x_0 = 1$

ii) $x_1 = 1 - \dfrac{e-3}{e-1} = \dfrac{2}{e-1}$

iii) $x_2 = \dfrac{2}{e-1} - \dfrac{e^{\left(\frac{2}{e-1}\right)} - \frac{2e}{e-1}}{e^{\left(\frac{2}{e-1}\right)} - 1}$

Aufgabe 4: a) Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$g(x) = e^{-x^2}.$$

b) Ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}), & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

stetig? Beweisen Sie Ihre Antwort.

c) Ist die Funktion f differenzierbar? Beweisen Sie Ihre Antwort.

(10 Punkte)

LÖSUNG:

a) $g'(x) = e^{-x^2} \cdot (-2x) = -2xe^{-x^2}$

b) f ist stetig: klar für $x \neq 0$. Für $x = 0$ bekommt man

$$|x^2 \sin(\tfrac{1}{x})| \leq |x^2| \xrightarrow[x \to 0]{} 0 \Rightarrow \lim_{x \to 0} x^2 \sin(\tfrac{1}{x}) = 0 \Rightarrow \lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$$

c) f ist auch differenzierbar: klar für $x \neq 0$. Für $x = 0$

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{h^2 \sin(\frac{1}{h}) - 0}{h} = h \sin(\tfrac{1}{h})$$

und $|h \sin(\frac{1}{h})| \leq |h| \xrightarrow[h \to 0]{} 0 \Rightarrow \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = 0 =: f'(0)$.

Bemerkung: f ist **nicht** stetig differenzierbar, weil der Limes

$$\lim_{x \to 0} f'(x) = \lim_{x \to 0} \left(2x \sin(\tfrac{1}{x}) - \cos(\tfrac{1}{x})\right)$$

nicht existiert.

Aufgabe 5: Sei P_n der Vektorraum der Polynome von Grad $\leq n$.
Seien $B_2 = \{p_0, p_1, p_2\}$ und $B_3 = \{p_0, p_1, p_2, p_3\}$ mit $p_i(x) := x^i$ Basen von P_2 und P_3.
Betrachten Sie $f : P_2 \to P_3$ mit $(f(p))(x) = xp(x)$.

a) Zeigen Sie, dass f linear ist.

b) Berechnen Sie die Matrix der linearen Abbildung f bzgl. B_2 und B_3.

(10 Punkte)

LÖSUNG:

a) Für $p, q \in P_2$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} &f(\lambda p + \mu q)(x) = x \cdot (\lambda p + \mu q)(x) = x \cdot (\lambda\, p(x) + \mu\, q(x)) \\ &= \lambda\, xp(x) + \mu\, xq(x) = \lambda \cdot f(p)(x) + \mu \cdot f(q)(x) = (\lambda f(p) + \mu f(q))\,(x) \quad \checkmark \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} &f(p_0)(x) = xp_0(x) = x \cdot 1 = x = p_1(x) \\ &f(p_1)(x) = xp_1(x) = x \cdot x = x^2 = p_2(x) \\ &f(p_2)(x) = xp_2(x) = x \cdot x^2 = x^3 = p_3(x) \\ \Rightarrow M_f = &\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Aufgabe 6: Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ Untervektorräume.
Ist $U + V = \{u + v \,|\, u \in U \text{ und } v \in V\} \subset \mathbb{R}^n$ ein Untervektorraum?
Beweisen Sie Ihre Antwort.

(10 Punkte)

LÖSUNG: Ja:

i) $0 \in U$, $0 \in V \Rightarrow 0 = 0 + 0 \in U + V$ ✓

ii)

$$\begin{aligned} w \in U + V &\Rightarrow w = u + v \text{ mit } u \in U, v \in V \\ &\Rightarrow \lambda w = \lambda u + \lambda v \text{ mit } \lambda u \in U, \lambda v \in V \\ &\Rightarrow \lambda w \in U + V \quad \checkmark \end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned} w, w' \in U + V &\Rightarrow w = u + v, w' = u' + v' \text{ mit } u, u' \in U,\ v, v' \in V \\ &\Rightarrow w + w' = (u + u') + (v + v') \text{ mit } u + u' \in U, v + v' \in V \\ &\Rightarrow w + w' \in U + V \quad \checkmark \end{aligned}$$

Aufgabe 7: Gegeben sei die Ebene

$$E = \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -16 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 15 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 6 \\ 21 \\ 2 \end{pmatrix} \ : \ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

Sei g die Gerade durch $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 9 \\ -15 \\ 7 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} -3 \\ -11 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie die Normalform von E, d.h. bestimmen Sie einen Vektor $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^3$ und eine Zahl $d \in \mathbb{R}$, so dass $E = \{\mathbf{x} \ : \ \mathbf{n} \cdot \mathbf{x} - d = 0\}$.

b) Wie lautet der Schnittpunkt von E und g?

c) Zeigen Sie, dass g senkrecht zu E ist.

(10 Punkte)

LÖSUNG:

a) Der Vektor $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ 15 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ 21 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$ ist senkrecht zu E und $\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -16 \\ 6 \end{pmatrix} \in E$, also

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -12 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -16 \\ 6 \end{pmatrix} \right) = 0$$

das heißt $d = -112$.

Insgesamt bekommt man also $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} -12 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$ und $d = -112$. Die Ebene wird also durch folgende Gleichung beschrieben: $6x - 2y + 3z - 56 = 0$.

b) Die Gleichung von g lautet $\mathbf{x} \in g \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{p} + \lambda(\mathbf{q} - \mathbf{p}), \lambda \in \mathbb{R}$.
Bestimme also $\lambda \in \mathbb{R}$, so dass:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x} \in E \cap g &\Leftrightarrow \mathbf{n} \cdot \{(\mathbf{p} + \lambda(\mathbf{q} - \mathbf{p})) - \mathbf{x}_0\} = 0 \\
&\Leftrightarrow \mathbf{n} \cdot \{(\mathbf{p} - \mathbf{x}_0) + \lambda(\mathbf{q} - \mathbf{p}))\} = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -12 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -12 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} \right) = 0 \\
&\Leftrightarrow -98 + 196\lambda = 0 \\
&\Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{p} + \frac{1}{2}(\mathbf{q} - \mathbf{p}) = \begin{pmatrix} 3 \\ -13 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

c) Der Richtungsvektor der Geraden g ist $\mathbf{q} - \mathbf{p} = \begin{pmatrix} -12 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$. Er ist parallel zum Normalenvektor n der Ebene E.

Aufgabe 8: a) Bestimmen Sie die LR-Zerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

b) Berechnen Sie die Lösung von $Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = b$.

c) Berechnen Sie $\det A$.

(10 Punkte)

LÖSUNG:

a)

$$\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \\
\hookrightarrow L^1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \hookrightarrow A^2 = L^1 A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \\
\hookrightarrow L^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \hookrightarrow A^3 = L^2 A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = R
\end{aligned}$$

und

$$L = (L^1)^{-1}(L^2)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Um $Ax = LRx = b$ zu löesen, löst man zunächst $Ly = b$ und dann $Rx = y$.

$$Ly = b \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ 2y_1 + y_2 \\ y_1 + y_2 + y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow y = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$Rx = y \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ 2x_2 + x_3 \\ 3x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

c) $\det A = (\det L)(\det R) = (1 \cdot 1 \cdot 1)(1 \cdot 2 \cdot 3) = 6$

Aufgabe 9: Bestimmen Sie die Gleichung des Tangentialraumes an den Graphen der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = 3xy + y^2$$

im Punkt $(1, 0, f(1, 0))$.

(10 Punkte)

Lösung: Definiere $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y) \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x,y) \end{pmatrix}$. Es ist $f(1, 0) = 0$ und

$$DF = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3y & 3x + 2y \end{pmatrix}$$

also

$$(x, y, z) \in T_{(1,0,f(1,0))} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 10: Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^6}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

a) Ist f im Ursprung stetig? Beweisen Sie Ihre Antwort.

b) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen im Urpsrung.

c) Ist f total differenzierbar? Beweisen Sie Ihre Antwort.

(10 Punkte)

LÖSUNG:

a) Seien $x_n = \dfrac{1}{n^3}$ und $y_n = \dfrac{1}{n}$, dann

$$(x_n, y_n) \to (0,0) \text{ aber } f(x_n, y_n) = \frac{n^{-3}(n^{-1})^3}{(n^{-3})^2 + (n^{-1})^6} = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2} \neq 0 = f(0,0)$$

$\Rightarrow f$ ist nicht stetig in $(0,0)$.

b)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \frac{0-0}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \frac{0-0}{h} = 0$$

c) Nein, f ist nicht stetig.