Aufgabe 19: Berechnen Sie die Singulärwertzerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 0 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 20: Als Skalarprodukt auf der Raume der Polynome betrachten wir

$$g(p,q) = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\,\mathrm{d}x.$$

Wenden Sie das Gram-Schmidt-Orthonomalisierungsverfahren auf die Monome $p_0 = 1, p_1 = x, \ldots, p_4 = x^4$, um eine orthonormale Basis der Unterraums $\mathcal{P}_4$ zu berechnen.

Aufgabe 21: In dieser Aufgabe diskutieren wir ein Beispiel, bei dem die Diagonalisierung von Matrizen es uns erlaubt, eine explizite Formel anzugeben für die Berechnung von Gliedern einer Zahlenfolge, die eigentlich durch eine iterative Vorschrift beschrieben werden. Wir betrachten dazu eine Zahlenfolge ähnlich den Fibonacci-Zahlen.

$$\begin{aligned} x_0 = 1 \qquad & x_1 = 1, \\ x_{n+1} \quad = \quad & x_n + 6x_{n-1} \qquad \text{für } n = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

Dies führt auf die Zahlenfolge: $1, 1, 7, 13, 55, 133\ldots$.
Um nun eine explizite Formel für die x_n angeben zu können, stellen wir die Iterationsvorschrift als Matrixoperation dar:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{pmatrix}}_{=:\, y_{n+1}} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{pmatrix}}_{=:\, y_n} \quad \Leftrightarrow \quad y_{n+1} = Ay_n = A^n y_1 \qquad \text{mit } y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Um nun A^n direkt zu berechnen berechnen, diagonalisieren wir A. Gehen Sie wie folgt vor:

a) Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrix A.

b) Zeigen Sie, dass der Vektor $\begin{pmatrix} \lambda_i \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ_i ist.
Tipp: Rechnen Sie im Folgenden so lange wie möglich mit der Variablen λ_i und nicht mit den Werten von λ_i.

c) Diagonalisieren Sie die Matrix A.

d) Berechnen Sie A^n.

e) Geben Sie eine Formel für y_{n+1} und dadurch für x_n an.