Aufgabe 22: Untersuchen Sie in Abhänigkeit von $a < 0$, ob die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ auf $[a, \infty)$ Lipschitz-stetig ist?
Ist f stetig auf $[a, \infty)$?

Aufgabe 23: Geben Sie eine Lösung der Differentialgleichung an:

a) $y' = x^3 + \cos(x)$

b) $y' = \dfrac{xy}{10}, \quad y > 0$

Bemerkung: Aufgabe 3 & 4 zeigen, dass die Bedingungen aus dem Satz von Picard-Lindelöf nicht einfach gestrichen werden können.

Aufgabe 24: Betrachten Sie die folgende Differentialgleichung

$$y' = \sqrt{|y|}$$

a) Überprüfen Sie, dass mit $y(x)$ auch $\tilde{y}(x) = -y(-x)$ Lösung der Gleichung ist.

b) Überprüfen Sie, dass: $y_C(x) = \dfrac{(x+C)^2}{4}$ für $x > -C$ positive Lösung ist.

Gibt es mehr Lösungen?

c) Überprüfen Sie, dass für $a < 0 < b$

$$y_{a,b}(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-b)^2}{4}, & \text{für } x > b \\ 0, & \text{für } a \leq x \leq b \\ -\dfrac{(x-a)^2}{4}, & \text{für } x < a \end{cases}$$

Lösung der Differentialgleichungen zu den Anfangsdaten $y(0) = 0$ ist.

Warum steht das nicht im Widerspruch zum Satz von Picard-Lindelöf aus der Vorlesung?

Aufgabe 25:

a) Überprüfen Sie, dass

$$y_C(x) = -\log(\cos x + C) \text{ mit } \cos x + C > 0$$

Lösung der Differentialgleichung

$$y' = e^y \sin x$$

ist.

b) Bestimmen Sie C aus der Anfangsbedingung $y(0) = g$.

c) Auf welchem Gebiet in Abhängigkeit von g existiert also eine Lösung des Anfangswertproblems?