Aufgabe 26: Zeigen Sie dass das Cauchy-Euler-Verfahren von zweiter Ordnung konsistenz ist.

Aufgabe 27: Schreiben Sie die Runge-Kutta-Verfahren

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{4}{6} & \frac{1}{6} \end{array}$$

in der Form

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= \dots \\ k_1 &= \dots \\ &\dots \end{aligned}$$

Aufgabe 28: Schreiben Sie eine Iteration der Form

$$y_{i+1} = g(h\lambda)\, y_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

für das Anfangswertproblem

$$y'(t) = \lambda\, y(t), \quad y(0) = y_0 \text{ und } \lambda < 0$$

unter Verwendung

a) des expliziten Euler-Verfharen

$$y_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i)$$

b) des impliziten Euler-Verfharen

$$y_{i+1} = y_i + hf(t_{i+1}, y_{i+1})$$

Prüfen Sie, ob $|y_{i+1}| < |y_i|$ für alle $h > 0$.

Aufgabe 29: Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \dot{y}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_2(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix}$$

mit den Anfangswerten $y_1(0) = 1$ und $y_2(0) = 0$.
Lösen Sie diese Differentialgleichung näherungsweise mit MATLAB unter Verwendung

a) des Eulerschen Polygonzugverfahrens

b) des Cauchy-Euler-Verfahrens

für $t \in [0, 2\pi]$. Verwenden Sie die konstante Zeitschrittweite $\tau = \frac{2\pi}{20}$. Zeichen Sie die Lösungskurve und ihre beiden Approximationen. Berechnen Sie für beide Verfahren den Fehler zur Zeit 2π für $\tau = \frac{2\pi}{20}$, $\tau = \frac{2\pi}{40}$ sowie $\tau = \frac{2\pi}{80}$.