Aufgabe 34: (a) Leiten Sie für einen Kreiszylinder mit Höhe h und Radius R des Basiskreises die Formel zur Berechnung des Volumens mittels des Satzes von Gauß her.

(b) Leiten Sie für ein Tetraeder mit den Eckpunkten $P_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix}$ $(0 \leq i \leq 3)$ im $\mathbb{R}^3$ die folgende Formel für das Volumen V mit Hilfe des Satzes von Gauß her:

$$V = \frac{1}{6} \left| \det \begin{pmatrix} x_1 - x_0 & x_2 - x_0 & x_3 - x_0 \\ y_1 - y_0 & y_2 - y_0 & y_3 - y_0 \\ z_1 - z_0 & z_2 - z_0 & z_3 - z_0 \end{pmatrix} \right| .$$

Hinweis: Was gilt für Richtung (inklusive Vorzeichen!) und Norm des Kreuzproduktes zweier Vektoren? Erinnern Sie sich weiterhin an den Zusammenhang zwischen Determinante und Kreuzprodukt.

(c) (**Zusatzaufgabe:**) Wie würde man das Volumen eines beliebigen Polyeders im $\mathbb{R}^3$ mit Hilfe von Dreiecksoberflächen berechnen?

Aufgabe 35: Betrachten Sie das Sechseck, das durch die Punkte $P_1 = (2, -1)$, $P_2 = (0, -2)$, $P_3 = (-2, -1)$, $P_4 = (-2, 1)$, $P_5 = (0, 2)$ und $P_6 = (2, 1)$ gegeben ist. Die eingeschlossene Fläche bezeichen wir mit H. Berechnen Sie die Fläche (das zweidimensionale Volumen) von H.

Aufgabe 36: Berechnen Sie das Volumen des Volltorus, der durch Rotation der Kreisscheibe

$$K = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0,\ (x - b)^2 + z^2 \leq a^2 \}$$

mit $0 < a < b$ um die z-Achse entsteht.

Tipp: Bei einem Integranden der Form $\sqrt{a^2 - z^2}$ und Integration in der Variablen z bietet sich die Substitution $z := a \sin(t)$ an.