**Aufgabe 37:** Sei $R > S > 0$. Berechnen Sie Volumen und Oberfläche des Torus

$$T := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, z^2 + \left(\sqrt{x^2 + y^2} - R\right)^2 \leq S^2\}.$$

*Hinweis:* Man benutzet die Parametrisierung

$$\Psi : (r, \theta, \phi) \mapsto ((R + r\cos\theta)\cos\phi, (R + r\cos\theta)\sin\phi, r\sin\theta) \in \mathbb{R}^3.$$

**Aufgabe 38:** Das Trägheitsmoment einer Fläche $F \in \mathbb{R}^2$ bezüglich Rotation um den Ursprung ist

$$\int_F (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}(x, y)$$

Sei nun $F := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, |x^2 - y^2| \leq 1, |2xy| \leq 1\}$.

a) Skizzieren Sie die Menge $F$.

b) Berechnen Sie den Schwerpunkt von $F$. *Hinweis:* Symmetrie.

c) Berechnen Sie das Trägheitsmoment von $F$ bezüglich des Ursprungs. *Hinweis:* Koordinatentransformation $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$ für ein geeignetes Teilstück von $F$.

**Aufgabe 39:** Berechnen Sie des Schwerpunktes

$$\bar{x} = \frac{1}{\mathrm{vol}(C)} \int_C x\,\mathrm{d}x$$

des Kugeloktanten

$$C := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\|_2^2 \leq 1,\ x_1, x_2, x_3 \geq 0\}$$

mittels Kugelkoordinanten mit Transformation

$$F : [0, 1] \times [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \frac{\pi}{2}] \ni (r, \theta, \phi) \mapsto (r\sin\phi\cos\theta, r\sin\phi\sin\theta, r\cos\phi) \in \mathbb{R}^3.$$

*Hinweis:* $\sin^2\phi = \dfrac{1 - \cos(2\phi)}{2}$