Hinweise zur Programmieraufgabe III

Es hat sich gezeigt, dass es besser ist, die Fixpunktiteration für die Gleichung

$$-\nabla\left(\frac{\beta}{2}(\nabla\cdot p)-f\right)+\left|\nabla\left(\frac{\beta}{2}(\nabla\cdot p)-f\right)\right|p=0$$

leicht abzuändern. Bevor wir $p/\tau - p/\tau$ addieren, teilen wir die Gleichung durch $\beta/2$:

$$-\nabla\left((\nabla\cdot p)-\frac{2}{\beta}f\right)+\left|\nabla\left((\nabla\cdot p)-\frac{2}{\beta}f\right)\right|p=0.$$

Die Fixpunktiteration ist dann

$$p^{n+1}=\frac{p^n+\tau\nabla(\nabla\cdot p^n-\frac{2}{\beta}f)}{1+\tau\left|\nabla(\nabla\cdot p^n-\frac{2}{\beta}f)\right|}.$$

Der Vorteil dieser Formulierung besteht darin, dass die Konvergenz des Verfahrens nur von τ und nicht von τ und β abhängt.

Programmieren Sie die Fixpunktiteration mit dem in der Vorlesung besprochenen Abbruchkriterium, also z.B. $\max_{i,j}\left|p_{i,j}^{n+1}-p_{i,j}^n\right| < 10^{-3}$, und experimentieren Sie mit den Parametern:

- Für welche τ konvergiert der Algorithmus? Tipp: $\tau < 1/8$ sollte funktionieren.
- Für welche β bleibt der Kreis in dem Testbild erhalten und für welche verschwindet er? Tipp: für $\beta = 100$ sollte er verschwinden, für $\beta = 10$ bleiben.
- Welchen Einfluss hat der Parameter β auf das Luftbild?
- Vergleichen Sie die Ergebnisse für die beiden Energien

$$E[u]=\int_\Omega \beta\,|\nabla u|+(u-f)^2 \quad \text{und} \quad E[u]=\int_\Omega \beta\,|\nabla u|+|u-f|\,.$$

Achtung: Je nachdem, welche Funktion Sie zur Ausgabe der Daten benutzen (`image`, `surf`, ...), skaliert `MATLAB` die Daten. Achten Sie darauf, dass die Farbskala das volle Intervall $[0,1]$ umfasst ($\rightsquigarrow$`caxis`).