Numerische Mathematik

Sommersemester 2012
Prof. Dr. Carsten Burstedde
Jutta Adelsberger, Daniel Wissel

universitätbonn

Übungsblatt 11.

Abgabe am **Dienstag, 03.07.2012**

Aufgabe 32. (Anfangswertprobleme und Mehrdeutigkeit) (5 Punkte)

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y' = \sqrt{y}, \quad t \geq 0, \quad y(0) = 0.$$

a) Geben Sie zwei Lösungen des Problems explizit an.

b) Zeigen Sie, dass das explizite Euler-Verfahren die triviale Lösung liefert.

Aufgabe 33. (Abfallverhalten linearer Differentialgleichungen) (8 Punkte)

Sei $y' = Ay$ ein lineares Differentialgleichungssystem mit einer symmetrischen Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

a) Zeigen Sie, dass die Voraussetzungen des Satzes von Picard-Lindelöf erfüllt sind.

b) Geben Sie ein notwendiges und hinreichendes Kriterium dafür an, dass bei jedem Anfangswert $y_0 \in \mathbb{R}^n$ für die Lösung des Anfangswertproblems $y'(t) = Ay(t)$, $y(0) = y_0$

$$\lim_{t \to \infty} \|y(t)\|_\infty = 0$$

gilt.

Aufgabe 34. (Runge-Kutta-Verfahren) (8 Punkte)

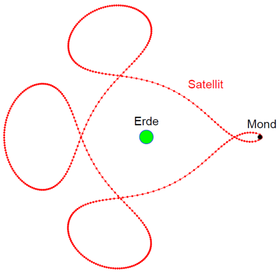
Zeigen Sie, dass das durch

$$\begin{aligned}
U_1' &:= f\Big(x_m, u_h(x_m)\Big), \\
U_2' &:= f\Big(x_m + \frac{h}{2}, u_h(x_m) + \frac{h}{2} U_1'\Big), \\
U_3' &:= f\Big(x_m + h, u_h(x_m) + h(-U_1' + 2U_2')\Big), \\
u_h(x_{m+1}) &:= u_h(x_m) + \frac{h}{6}(U_1' + 4U_2' + U_3')
\end{aligned}$$

gegebene Einschrittverfahren („einfache Kutta-Regel“) genau die Konsistenzordnung 3 besitzt.

Programmieraufgabe 6. (Implizites Runge-Kutta-Verfahren) (18 Punkte)

Es soll die Bahnkurve eines Satelliten im Kraftfeld von Erde und Mond beschrieben werden. Dabei wird angenommen, dass sich alle Körper in einer Ebene bewegen und Erde und Mond mit konstanter Winkelgeschwindigkeit und konstantem Abstand um ihren gemeinsamen Schwerpunkt rotieren. Wir wählen ein mitrotierendes Koordinatensystem, in welchem Erde und Mond als ruhend erscheinen und die festen Positionen $(-\mu, 0)$ bzw. $(1-\mu, 0)$ haben. Die Bahn $(x_1(t), x_2(t))$ des Satelliten in der Ebene wird dann durch das Differentialgleichungssystem



$$\begin{aligned} x_1'' &= x_1 + 2x_2' - (1-\mu)\frac{x_1+\mu}{r_1^3} - \mu\frac{x_1-1+\mu}{r_2^3} \\ x_2'' &= x_2 - 2x_1' - (1-\mu)\frac{x_2}{r_1^3} - \mu\frac{x_2}{r_2^3} \end{aligned} \tag{1}$$

$$\text{mit} \quad r_1 := \sqrt{(x_1+\mu)^2 + x_2^2}, \quad r_2 := \sqrt{(x_1-1+\mu)^2 + x_2^2}$$

beschrieben. Hier ist $\mu = 1/82.45$ das Verhältnis zwischen der Masse des Mondes zur Gesamtmasse von Erde und Mond. Eine Längeneinheit entspricht der Distanz zwischen Erde und Mond und eine Zeiteinheit der Umlaufzeit des Mondes um die Erde.

a) Formulieren Sie das System (1) durch ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung $y' = f(t, y) = f(y)$.

b) Implementieren Sie das implizite Runge-Kutta-Verfahren vierter Ordnung vom Gauß-Typ der Stufe 2 mit Butcher-Tableau

$$\begin{array}{c|cc} (3-\sqrt{3})/6 & 1/4 & 1/4-\sqrt{3}/6 \\ (3+\sqrt{3})/6 & 1/4+\sqrt{3}/6 & 1/4 \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}$$

und lösen Sie damit für konstante Schrittweite $h = 0.002$ das Problem (1) mit den Anfangsbedingungen

$$(x_1(0), x_2(0), x_1'(0), x_2'(0)) = (1.2, 0, 0, -1.0493575) \tag{2}$$

für $t \in [0, 10]$ sowie mit den Anfangsbedingungen

$$(x_1(0), x_2(0), x_1'(0), x_2'(0)) = (0.994, 0, 0, -2.0015851) \tag{3}$$

für $t \in [0, 20]$. Es ergeben sich geschlossene Bahnkurven, deren Periodenlängen im Fall (2) etwa $T = 6.19$ und im Fall (3) etwa $T = 17.07$ betragen.

Hinweise: Für die Hilfsvariablen $k_1, k_2 \in \mathbb{R}^4$ im Runge-Kutta-Verfahren muss ein nichtlineares Gleichungssystem gelöst werden. Formulieren Sie es als Nullstellensuche $F(\tilde{k}) = 0$ mit $\tilde{k} := (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^8$ und verwenden Sie zur Lösung das Newton-Verfahren mit der Jacobi-Matrix $(D_{\tilde{k}}F)_{ij} = \frac{\partial F_i(\tilde{k})}{\partial \tilde{k}_j}$, $i, j = 1, \ldots, 8$. Lösen Sie das entstehende lineare Gleichungssystem mit einem direkten oder iterativen Verfahren Ihrer Wahl.

c) Visualisieren Sie jeweils den Orbit des Satelliten in der Ebene und zeichnen Sie Erde und Mond in das Schaubild ein.

Abgabe **Mi 11.7.** und **Do 12.7.** im **CIP-Pool** (`www.iam.uni-bonn.de/pcpool/`). Ab Mi 4.7. hängt eine Terminliste für diese beiden Tage aus; bitte tragen Sie sich alleine oder in 2er Gruppen ein. Die Liste befindet sich Mo–Mi im CIP-Pool der Wegelerstraße, Do–Fr im CIP-Pool der Endenicher Allee.

Gesamtpunktzahl: 21 + 18 Punkte