Numerische Mathematik

Sommersemester 2012
Prof. Dr. Carsten Burstedde
Jutta Adelsberger, Daniel Wissel

universitätbonn

Übungsblatt 4.

Abgabe am **Dienstag, 8.5.2012**

Aufgabe 10. (Leibniz-Regel für dividierte Differenzen) (5 Punkte)

Beweisen Sie die folgende Aussage. Es seien $t_i \leq \ldots \leq t_{i+k}$ und $g(t), h(t)$ hinreichend oft differenzierbare Funktionen. Dann gilt

$$(gh)[t_i, \ldots, t_{i+k}] = \sum_{j=i}^{i+k} g[t_i, \ldots, t_j] \cdot h[t_j, \ldots, t_{i+k}].$$

Aufgabe 11. (B-Splines) (16 Punkte)

Gegeben seien Knoten $t_i < t_{i+1}$, $i \in \mathbb{Z}$. (Normierte) B-Splines $B_{i,1}(x)$ von der Ordnung 1 bzw. vom Grad 0 sind die Funktionen

$$B_{i,1}(x) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad x \in [t_i, t_{i+1}[\\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die B-Splines $B_{i,r}(x)$ von der Ordnung $r > 1$ genügen der Rekursionsformel

$$B_{i,r}(x) = \frac{x - t_i}{t_{i+r-1} - t_i} B_{i,r-1}(x) + \frac{t_{i+r} - x}{t_{i+r} - t_{i+1}} B_{i+1,r-1}(x).$$

a) Zeichnen Sie für ein festes $i \in \mathbb{Z}$ die B-Splines $B_{i,r}(x)$ der Ordnungen $r = 1, \ldots, 4$.

b) Bestimmen Sie für die quadratischen B-Splines deren Werte an den Knoten t_k, also $B_{i,3}(t_k)$ mit $k \in \mathbb{Z}$, sowie $\sum_{i \in \mathbb{Z}} B_{i,3}(x)$.

Im folgenden seien alle Knoten t_i äquidistant, d.h. $t_{i+1} - t_i = h$ für alle i.

c) Bestimmen Sie für die kubischen B-Splines $B_{i,4}(t_k)$ mit $k \in \mathbb{Z}$.

d) Geben Sie $B_{i,2}(x)$ und $B_{i,3}(x)$ in der Darstellung

$$B_{i,2}(x) = \begin{cases} ? & \text{für} \quad x \in [t_i, t_{i+1}[\\ ? & \text{für} \quad x \in [t_{i+1}, t_{i+2}[\\ ? & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$B_{i,3}(x) = \begin{cases} ? & \text{für} \quad x \in [t_i, t_{i+1}[\\ ? & \text{für} \quad x \in [t_{i+1}, t_{i+2}[\\ ? & \text{für} \quad x \in [t_{i+2}, t_{i+3}[\\ ? & \text{sonst} \end{cases}$$

an.

e) Bestimmen Sie $B_{i,4}(x)$ für $x < t_i$, für $t_i \leq x < t_{i+1}$ und für $t_{i+4} \leq x$. Zeigen Sie die Symmetrieeigenschaft $B_{i,4}(t_{i+2} - x) = B_{i,4}(t_{i+2} + x)$.

f) Der kubische Spline

$$S(x) = \sum_{k=-2}^{n-1} c_k B_{k,4}(x)$$

interpoliere $f(x)$ an den äquidistanten Knoten $x_i := t_i$ für $i = 1, \ldots, n$ und genüge den Randbedingungen $S'(x_1) = f'(x_1)$, $S'(x_n) = f'(x_n)$. Die Unbekannten c_k erhält man durch Auflösung eines speziellen linearen Gleichungssystems $Ac = b$ mit $c = (c_{-2}, c_{-1}, \ldots, c_{n-1})^T$ und $b = (f'(x_1), f(x_1), \ldots, f(x_n), f'(x_n))^T$. Geben Sie die Koeffizientenmatrix A an.

g) Der quadratische Spline

$$Q(x) = \sum_{k=-1}^{n-1} d_k B_{k,3}(x)$$

interpoliere $f(x)$ an den Stellen $x_0 = t_1$, $x_i = t_i + h/2$ mit $i = 1, \ldots, n-1$ und $x_n = t_n$. Die Unbekannten d_k erhält man durch Auflösung eines anderen Gleichungssystems $Ad = b$ mit $d = (d_{-1}, d_0, \ldots, d_{n-1})^T$ und $b = (f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_{n-1}), f(x_n))^T$. Geben Sie auch hier die Koeffizientenmatrix A an.

Aufgabe 12. (Marsden-Identität) (5 Punkte)

Beweisen Sie die folgende Aussage. Für alle $t \in [a, b]$ und $s \in \mathbb{R}$ gilt

$$(t-s)^{r-1} = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{i,r}(s) B_{i,r}(t) \quad \text{mit} \quad \varphi_{i,r}(s) = \prod_{j=1}^{r-1} (t_{i+j} - s),$$

wobei die Punkte t_k wie in der Vorlesung definiert sind.

Gesamtpunktzahl: 26 Punkte