Übungsblatt 5.

Abgabe am **Dienstag, 15.5.2012**

Aufgabe 13. (Faltung und Distribution) (10 Punkte)

Die Faltung zweier reeller Funktionen f, g ist

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t)dt.$$

a) Berechnen Sie $f * f$ mit $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0,1] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ anschaulich auf graphischem Wege.

b) Zeigen Sie die Faltungseigenschaft

$$(f * \delta)(x_0) = f(x_0)$$

für die Dirac-Delta-Funktion δ und eine bel. Funktion $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Verwenden Sie dabei die Heaviside-Funktion, für die $H' = \delta$ gilt.

c) Berechnen Sie die distributionelle Ableitung der Hutfunktion auf $[-1, 1]$.

Aufgabe 14. (Orthogonale Polynome) (12 Punkte)

Wir betrachten eine gegebene nichtnegative Gewichtsfunktion $w(x)$ auf dem Intervall $[a, b]$ und das Skalarprodukt $(f, g)_w := \int_a^b f(t)g(t)w(t)dt$.

a) Beweisen Sie Satz 2.4 der Vorlesung: Orthogonale Polynome p_k bezüglich $(\cdot, \cdot)_w$ mit führendem Koeffizienten 1 sind eindeutig bestimmt, und es gilt

$$\begin{aligned} p_{k+1}(x) &= (x - \alpha_k)p_k(x) - \beta_k^2 p_{k-1}(x) \quad \text{für } k \geq 0 \\ p_{-1}(x) &:= 0, \quad p_0(x) = 1 \end{aligned}$$

mit

$$\alpha_k = \frac{(xp_k, p_k)_w}{\|p_k\|_w^2}, \quad \beta_k = \frac{\|p_k\|_w}{\|p_{k-1}\|_w}.$$

b) Die Tschebyscheff-Polynome $T_k(x)$ (Definition siehe Blatt 2, Aufgabe 5) haben den führenden Koeffizienten 2^{k-1}. Berechnen Sie durch Vergleich der Tschebyscheff-Rekursion mit obiger Formel die Koeffizienten α_k, β_k, und damit $\|T_k\|_w$.

Aufgabe 15. (Gibbs-Phänomen) (4 Punkte)

Die 2π-periodische Funktion definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{für } -\pi \leq x < 0 \\ 1 & \text{für } 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

nennt man *Rechteckschwingung*. Bestimmen Sie für die Rechteckschwingung die Fourier-Reihe

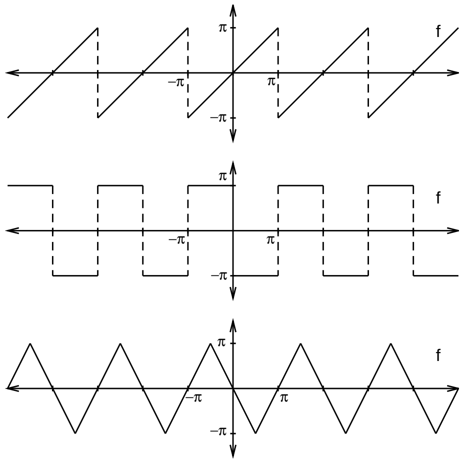
$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \quad \text{mit } n \to \infty.$$

Programmieraufgabe 3. (FFT) (14 Punkte)

Es seien die Funktionswerte einer periodischen Funktion f im Intervall $[-\pi, \pi)$ an den $N = 2^L$ Punkten x_j, $0 \leq j < N$, mit $x_j = -\pi + 2\pi j/N$ gegeben.

a) Schreiben Sie eine Funktion, die für $N = 2^L$ abhängig von einem Parameter die FFT eines komplexen Arrays bzw. die inverse FFT berechnet. Verifizieren Sie, dass die beiden Aktionen tatsächlich invers zueinander sind.

Betrachten Sie als Beispiele die (neben der Sinus- und Kosinusschwingung) wichtigsten Schwingungstypen der analogen und digitalen Signalverarbeitung: Sägezahn-, Rechteck- und Dreieck-Schwingung (siehe Bild).



b) Ermitteln Sie die Koeffizienten für diese drei Beispiele für $L = 0, 2, 4, 6$. Ermitteln Sie anschließend jeweils wieder die Originalfunktionen aus den eben berechneten Fourier-Koeffizienten.

Abgabe (aufgrund von DIES am 23.5.) am **Do 24.5.** und **Fr 25.5.** im **CIP-Pool** (`www.iam.uni-bonn.de/pcpool/`). Ab Mi 16.5. hängt eine Terminliste für diese beiden Tage aus; bitte tragen Sie sich alleine oder in 2er Gruppen ein. Die Liste befindet sich Mo–Mi im CIP-Pool der Wegelerstraße, Do–Fr im CIP-Pool der Endenicher Allee.

Gesamtpunktzahl: 26 + 14 Punkte