Numerische Mathematik

Sommersemester 2012
Prof. Dr. Carsten Burstedde
Jutta Adelsberger, Daniel Wissel

Übungsblatt 6.

Abgabe am **Dienstag, 22.05.2012**

Aufgabe 16. (Fourier-Transformation der Gauß-Funktion) (8 Punkte)

Berechnen Sie die (kontinuierliche) Fourier-Transformierte der univariaten Gauß-Funktion $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$ für festes $\sigma > 0$.
Hinweise:
(1) Verwenden Sie folgende Variante des Cauchyschen Integralsatzes (Funktionentheorie): Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph (d.h. unendlich oft komplex differenzierbar). Dann gilt für jede geschlossene, stückweise glatte Kurve C: $\int_C f(z)dz = 0$.
(2) Es wird als bekannt vorausgesetzt, dass $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.

Aufgabe 17. (Trigonometrische Interpolation) (10 Punkte)

Wir betrachten die 2π-periodische Fortsetzung der reellen Funktion

$$f(x) = \pi - |x| \quad \text{in} \quad [-\pi, \pi).$$

a) Führen Sie die kontinuierliche Fourier-Transformation von f durch, d.h. bestimmen Sie die Koeffizienten α_k und β_k der Fourier-Reihe

$$f(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} (\alpha_j \cos(jx) + \beta_j \sin(jx)).$$

Konvergiert die Fourier-Reihe in diesem Fall punktweise gegen f?

b) Zeichnen (oder plotten) Sie f sowie die Entwicklungen von f in der Fourier-Reihe bis zum zweiten, dritten und vierten Term.

c) Führen Sie nun die diskrete Fourier-Transformation von f für $N = 8$ durch, d.h. bestimmen Sie die Koeffizienten a_k und b_k des trigonometrischen Interpolationspolynoms

$$P(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{3} (a_j \cos(jx) + b_j \sin(jx)),$$

wobei $P(x_k) = f(x_k)$ an den Stellen $x_k = -\pi + 2\pi k/8$ für $k = 0, \ldots, 7$.

d) Zeichnen (oder plotten) Sie f und P. Vergleichen Sie das Ergebnis der diskreten Fourier-Transformation mit dem aus Aufgabe b).

Aufgabe 18. (Newton-Cotes-Formeln) (6 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass das Gewicht w_4 der Newton-Cotes-Formel der Ordnung 8 (d.h. mit 9 Knoten) negativ ist.

b) Die offenen Newton-Cotes-Formeln sind definiert als interpolatorische Quadraturformeln zu den Stützstellen

$$x_i = a + \xi_i(b-a), \quad \xi_i = \frac{i+1}{n+2}, \; i = 0, \ldots, n.$$

Für $n = 0$ und $n = 1$ berechne man die zugehörigen Gewichte.

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte