Numerische Mathematik

Sommersemester 2012
Prof. Dr. Carsten Burstedde
Jutta Adelsberger, Daniel Wissel

Übungsblatt 7.

Abgabe am **Dienstag, 5.6.2012**

Aufgabe 19. (Symmetrische Quadraturregeln) (8 Punkte)

Für $n + 1$ paarweise verschiedene Stützstellen $x_0, \dots, x_n$ nennt man die eindeutig bestimmte Quadraturformel, welche alle Polynome $p \in \Pi_n$ exakt integriert, auch *Interpolations-Quadraturformel*.

Beweisen Sie dazu folgenden Satz: Sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ und $I_n(f) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i f(x_i)$ eine Interpolations-Quadraturformel mit Stützstellen, die symmetrisch zum Intervallmittelpunkt verteilt sind, d.h. für die $x_i + x_{n-i} = a + b$ gilt. Dann folgt

a) $\lambda_i = \lambda_{n-i}$ für alle $0 \leq i \leq n$, d.h. I_n ist symmetrisch.

b) Ist $n \in \mathbb{N}$ gerade, so ist I_n sogar auf Π_{n+1} exakt.

Aufgabe 20. (Stützstellen der Gauß–Quadratur) (8 Punkte)

Seien $\langle f, g\rangle = \int f(x)g(x)\omega(x)\,dx$ ein Skalarprodukt und α_i, β_i für $i \geq 0$ die Koeffizienten der Drei–Term–Rekursion zur Berechnung der Orthonormalpolynome $\{u_i\}_{i\geq 0}$ mittels

$$\beta_{n+1}u_{n+1}(x) = (x - \alpha_n)u_n(x) - \beta_n u_{n-1}(x), \quad n \geq 0; \quad u_0 = 1/\|1\|, \quad u_{-1} \equiv 0.$$

Zeigen Sie, dass die Stützstellen der n–stufigen Gauß–Quadraturformel gerade die Eigenwerte der Matrix

$$T_n := \begin{bmatrix} \alpha_0 & \beta_1 & & & \\ \beta_1 & \alpha_1 & \beta_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \beta_{n-2} & \alpha_{n-2} & \beta_{n-1} \\ & & & \beta_{n-1} & \alpha_{n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

sind.

Hinweis: Die Koeffizienten α_i und β_i entsprechen nicht der Definition aus der Vorlesung. Die hier verwendete Darstellung hat den Vorteil, dass sich direkt eine *symmetrische* Tridiagonalmatrix T_n ergibt.

Aufgabe 21. (Anwendung von Quadraturformeln) (12 Punkte)

Betrachten Sie das Integral

$$I(f) = \int_0^2 \frac{2}{x^2 + 4}\,dx.$$

a) Berechnen Sie $I(f)$ mit der Trapezregel und der Simpson-Regel.

b) Schätzen Sie jeweils den Integrationsfehler ab und vergleichen Sie die Abschätzung mit dem wirklichen Fehler.

c) Unterteilt man $[a, b]$ in äquidistante Teilintervalle zur Maschenweite h und wendet auf diesen Intervallen jeweils die Trapez- bzw. Simpson-Regel an, so erhält man die *Trapezsumme* $T(h)$ bzw. *Simpson-Summe* $S(h)$. Leiten Sie diese Summen allgemein her und berechnen Sie damit jeweils $I(f)$ für $h = \frac{1}{2}$.

d) Schätzen Sie auch hier jeweils den Integrationsfehler ab und vergleichen Sie die Abschätzung mit dem wirklichen Fehler. Es gilt

$$T(h) - I(f) = \frac{h^2}{12}(b-a)f^{(2)}(\xi) \qquad \text{für ein } \xi \in [a, b] \text{ und } f \in C^2[a, b],$$
$$S(h) - I(f) = \frac{h^4}{180}(b-a)f^{(4)}(\xi) \qquad \text{für ein } \xi \in [a, b] \text{ und } f \in C^4[a, b],$$

e) Wie klein müsste h jeweils gewählt werden, damit der Integrationsfehler kleiner als 10^{-6} wird?

Programmieraufgabe 4. (Numerische Quadratur) (14 Punkte)

Eine eindimensionale Funktion im Intervall $[a, b]$ sei als separate Unterroutine gegeben. Schreiben Sie jeweils ein Programm zur Berechnung des Integrals dieser Funktion

a) mittels Trapezsumme mit Maschenweite $(b - a)/n$ für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ und

b) mittels m Romberg-Extrapolationsschritten (d.h. $2^{m-1} + 1$ Stützstellen in Schritt m) mit Hilfe der Trapezsummen von Aufgabe a). Der Fall $m = 1$ entspricht somit der Trapezregel ($n = 1$). Mehrfache Funktionsauswertungen an derselben Stelle sind zu vermeiden.

Setzen Sie nun das Romberg-Verfahren zur Berechnung des natürlichen Logarithmus $\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt$ für $x > 0$ ein. Hierzu sollen nur die Grundrechenoperationen verwendet werden.

c) Berechnen Sie $\ln(x)$ näherungsweise für $x = 10^k$ mit $k = -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6$ und $m = 1, 2, \ldots, 6$.

d) Plotten Sie den Aufwand (die Zahl der benötigten Grundrechenoperationen) N gegen den Fehler ε für die verschiedenen k und m in einen Plot. Verbinden Sie dabei die Fehler für gleiches k. Verwenden Sie eine logarithmische Skala auf beiden Achsen.

e) Ermitteln Sie graphisch die ungefähren Konvergenzraten α, wobei $\varepsilon \approx c \cdot N^{-\alpha}$ für die verschiedenen Werte von x. Eine Halbierung des Fehlers bei einer Verdoppelung des Aufwands entspricht einer Konvergenzrate von 1. In einem Log-Log-Plot entspricht die Steigung einer Geraden durch die verschiedenen Fehler (bei gleichem x) der Konvergenzrate. Ermitteln Sie so auch die jeweiligen Fehlerkonstanten c.

f) Für welche Werte von x liefert die Romberg-Extrapolation eine gute Näherung für $\ln(x)$? Begründen Sie dieses Verhalten auch theoretisch.

Abgabe **Mi 13.6.** und **Do 14.6.** im **CIP-Pool** (`www.iam.uni-bonn.de/pcpool/`). Ab Mi 6.6. hängt eine Terminliste für diese beiden Tage aus; bitte tragen Sie sich alleine oder in 2er Gruppen ein. Die Liste befindet sich Mo–Mi im CIP-Pool der Wegelerstraße, Do–Fr im CIP-Pool der Endenicher Allee.

Gesamtpunktzahl: 28 + 14 Punkte