Numerische Mathematik

Sommersemester 2012
Prof. Dr. Carsten Burstedde
Jutta Adelsberger, Daniel Wissel

universitätbonn

Übungsblatt 9.

Abgabe am **Dienstag, 19.6.2012**

Aufgabe 26. (Variation der Konstanten) (10 Punkte)

a) Lösen Sie mittels *Variation der Konstanten* die folgende Anfangswertaufgabe

$$y'' + \omega_0^2 y = \sin(\omega x), \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 1,\ \omega_0 \neq \omega.$$

b) Bestimmen Sie zunächst eine spezielle Lösung von $y'' + \omega^2 y = \sin(\omega x)$ mittels eines eigenen Ansatzes. Geben Sie nun die Gesamtlösung für die Anfangsdaten $y(0) = 1,\ y'(0) = 1$ an. Vergleichen Sie mit dem Ergebnis aus Teilaufgabe a) für den Grenzwert $\omega_0 \to \omega$.

Aufgabe 27. (Stetige Abhängigkeit vom Anfangsdatum) (8 Punkte)

Sei f stetig und erfülle die sogenannte *einseitige Lipschitz–Bedingung*

$$\big(f(t,y) - f(t,z)\big)^T (y - z) \leq l\,\|y - z\|_2^2$$

für alle $(t,y),\ (t,z) \in [0,T) \times \mathbb{R}^n$ und ein $l \in \mathbb{R}$. Ferner seien $y, z\colon [0,T) \to \mathbb{R}^n$ Lösungen der Anfangswertprobleme $y' = f(t,y)$ mit $y(0) = y_0$ bzw. $z' = f(t,z)$ mit $z(0) = z_0$ mit Vorgaben $y_0, z_0 \in \mathbb{R}^n$.

a) Zeigen Sie für $x(t) := \|y(t) - z(t)\|_2^2$ und ein beliebiges Intervall $(a,b) \subseteq [0,T)$ mit $x(t) \neq 0$ für $t \in (a,b)$ die Beziehung

$$\frac{x'(t)}{x(t)} \leq 2l.$$

b) Zeigen Sie, dass

$$\|y(t) - z(t)\|_2 \leq e^{lt}\,\|y_0 - z_0\|_2 \text{ für alle } t \in [0,T).$$

Damit hängt $y' = f(t,y)$ stetig von den Anfangsdaten ab.

Hinweis: Betrachten Sie $\int \frac{d}{dt} \log x(t)\, dt$ mit $x(t)$ aus a) über geeigneten Integrationsgrenzen.

Aufgabe 28. (Euler-Verfahren) (6 Punkte)

Gegeben sei die gewöhnliche Differentialgleichung zweiten Grades

$$y'' - y^2 = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

Für eine gewöhnliche Differentialgleichung ersten Grades,

$$u' = f(t,u),\ u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n,$$

ist das Euler–Polygonzugverfahren mit Maschenweite h durch

$$u_{i+1} := u_i + hf(t_i, u_i)$$

definiert. Berechnen Sie mit Hilfe des Euler–Polygonzugverfahrens Näherungen für $y(1)$ und für $y'(1)$. Dabei sollen die Schrittweiten $h = 1/2$ und $h = 1/4$ verwendet werden.

Programmieraufgabe 5. (Explizites/implizites Euler-Verfahren) (14 Punkte)

Es sei das Anfangswertproblem

$$y'(t) = f(t, y), \quad y(t_0) = g$$

mit $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$, $f(t, y) := Ay(t)$, $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$, $g \in \mathbb{R}^d$ gegeben.

a) Implementieren Sie zur Lösung des Anfangswertproblems das explizite Euler-Verfahren mit fester Maschenweite h

$$y_0 := y(t_0), \quad y_{k+1} := y_k + hf(t_k, y_k), \quad k = 0, 1, \dots$$

sowie das implizite Euler-Verfahren

$$y_0 := y(t_0), \quad y_{k+1} := y_k + hf(t_{k+1}, y_{k+1}), \quad k = 0, 1, \dots$$

b) Wenden Sie beide Verfahren auf das Anfangswertproblem

$$y'(t) = -15y(t), \quad y(0) = 1$$

mit $d = 1$ an. Plotten Sie die Approximationen y_k zu den Zeitpunkten $t_k = kh,\ k = 0, \dots, N$ für die Schrittweiten $h = 0.01,\ 0.1,\ 0.2$ bis zum Zeitpunkt $T = Nh = 1$. Vergleichen Sie im Plot die Verfahren mit der exakten Lösung $y(t) = e^{-15t}$.

c) Leiten Sie für die allgemeinere Differentialgleichung

$$y'(t) = \lambda y(t), \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

für das explizite und implizite Euler-Verfahren eine explizite Formel für y_{k+1} zum Zeitpunkt $t_{k+1} = (k + 1)h$ her. In der expliziten Formel soll y_{k+1} nur von λ und h abhängen. Genauer gilt

$$y_{k+1} = G(h\lambda)y_k,$$

wobei $G(z)$ mit $z = h\lambda$ die Stabilitätsfunktion des Verfahrens ist. Geben Sie jeweils G an.

d) Skizzieren Sie für beide Verfahren das Stabilitätsgebiet, d.h. $\{z : |G(z)| < 1\}$. Was ist die Bedeutung der Bedingung $|G(z)| < 1$?

e) Zeichnen Sie die Punkte $h\lambda$ ein, für die Sie die Experimente in b) durchgeführt haben. Können Sie mit Hilfe des Stabilitätsgebiets das Verhalten der beiden Verfahren in b) erklären?

f) Testen Sie die Verfahren erneut anhand des Anfangswertproblems

$$\begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1000 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie jeweils explizit die Iterierten $(y_{1,k}, y_{2,k})$ und vergleichen Sie diese mit der exakten Lösung an der Stelle $t_k = kh$. Was stellen Sie fest?

Abgabe **Mi 27.6.** und **Do 28.6.** im **CIP-Pool** (`www.iam.uni-bonn.de/pcpool/`). Ab Mi 20.7. hängt eine Terminliste für diese beiden Tage aus.

Gesamtpunktzahl: 24 + 14 Punkte