

# Diskretisierung von Differentialgleichungen im Rahmen des Proseminars "Numerische Lineare Algebra" von Prof.Dr.Sven Beuchler

Kevin Caldwell

18.April 2012

Diskretisierung  
von Differential-  
gleichungen

Kevin Caldwell

Motivation

Diskretisierung

1D-Modell

2D-Modell

3D-Modell

Fazit

## 1 Motivation

## 2 Diskretisierung

- 1D-Modell
- 2D-Modell
- 3D-Modell

## 3 Fazit

# Motivation

Diskretisierung  
von Differential-  
gleichungen

Kevin Caldwell

Motivation

Diskretisierung

1D-Modell

2D-Modell

3D-Modell

Fazit

- Mathematische Beschreibung von naturwissenschaftlich-technischen Problemstellungen führt häufig auf partielle Differentialgleichungen.
- Analytische Lösungen dieser DGL's existieren nur für Spezialfälle.
- In allen anderen Fällen muss man auf numerische Lösungsverfahren zurückgreifen.

# Gewöhnliche Randwertaufgabe 2. Ordnung

Diskretisierung  
von Differential-  
gleichungen

Kevin Caldwell

Motivation

Diskretisierung

1D-Modell

2D-Modell

3D-Modell

Fazit

Wir betrachten zunächst die gewöhnliche Differentialgleichung

$$-u''(x) = f(x), \quad x \in [0, 1] \quad (1)$$

mit den Randbedingungen

$$u(0) = \tau_0 \quad \text{und} \quad u(1) = \tau_1 \quad (2)$$

**Gegeben:** Die Funktion  $f$  und Randwerte  $\tau_0, \tau_1 \in \mathbb{R}$ .

**Gesucht:** Eine Funktion  $u(x)$ , welche die Differentialgleichung und die Randbedingungen erfüllt.

## Allgemein:

- Ein kontinuierliches Problem wird in endlich vielen Punkten betrachtet
- **Ziel:** kontinuierliche Probleme in endlicher Zeit und mit endlichem Speicherplatz bearbeiten zu können

# Diskretisierung von Differentialgleichungen

Diskretisierung  
von Differential-  
gleichungen

Kevin Caldwell

Motivation

Diskretisierung

1D-Modell

2D-Modell

3D-Modell

Fazit

Methode der Finiten Differenzen:

- Rechengitter
- Ableitungen werden durch Differenzenquotienten approximiert

# Rechengitter

Diskretisierung  
von Differential-  
gleichungen

Kevin Caldwell

Motivation

Diskretisierung

1D-Modell

2D-Modell

3D-Modell

Fazit

Das Intervall  $[0, 1]$ , auf dem die DGL(1) gegeben ist, wird in  $m$  äquidistante Teilintervalle  $[x_i, x_{i+1}]$  aufgeteilt mit:

$$x_i = x_0 + ih, \quad i = 0, 1, \dots, m$$

Die Punkte  $x_i$  und die Maschenweite (d.h. die Länge der Teilintervalle)

$$h = \frac{x_m - x_0}{m} = \frac{1}{m}$$

bestimmen ein eindimensionales "Gitter".

# Approximation der Differentialgleichung

Diskretisierung  
von Differential-  
gleichungen

Kevin Caldwell

Motivation

Diskretisierung

1D-Modell

2D-Modell

3D-Modell

Fazit

Approximation mit Hilfe der Definition der Ableitungen durch den Grenzwert der zugehörigen Differenzenquotienten. Es gilt:

$$u''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (u'(x+h) - u'(x)) \quad (3)$$

Ferner können wir benutzen, dass

$$u'(x+h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (u(x+h) - u(x)) \quad (4)$$

und

$$u'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (u(x) - u(x-h)) \quad (5)$$

gilt.

# Approximation der Differentialgleichung

Diskretisierung  
von Differential-  
gleichungen

Kevin Caldwell

Motivation

Diskretisierung

1D-Modell

2D-Modell

3D-Modell

Fazit

Setzen wir die Beziehungen (4) und (5) in (3) ein, so erhalten wir

$$u''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} (u(x-h) - 2u(x) + u(x+h)).$$

Verzichten wir jetzt auf den Grenzübergang, so gilt für hinreichend kleines  $h$

$$u''(x) \approx \frac{1}{h^2} (u(x-h) - 2u(x) + u(x+h)).$$

# Approximation der Differentialgleichung

Diskretisierung  
von Differential-  
gleichungen

Kevin Caldwell

Motivation

Diskretisierung

1D-Modell

2D-Modell

3D-Modell

Fazit

Substituieren wir die Approximation in die DGL(1) erhalten wir für  $i = 1, \dots, m - 1$

$$\frac{-u(x_{i-1}) + 2u(x_i) - u(x_{i+1}))}{h^2} \approx f(x_i)$$

Bei dieser Approximation erhalten wir einen Approximationsfehler zweiter Ordnung:  $\mathcal{O}(h^2)$

# Resultierendes Gleichungssystem

Diskretisierung  
von Differential-  
gleichungen

Kevin Caldwell

Motivation

Diskretisierung

1D-Modell

2D-Modell

3D-Modell

Fazit

Seien nun  $u_1, \dots, u_{m-1}$  kennzeichnende Approximationen zu  $u(x_1), \dots, u(x_{m-1})$ . Wir erhalten die Gleichung

$$-u_{i-1} + 2u_i - u_{i+1} = h^2 f(x_i), \quad i = 1, \dots, m-1.$$

Diese Gleichung ist ein System aus  $m-1$  lineare Gleichungen bestehend aus den  $m-1$  Unbekannten  $u_i, \dots, u_{m-1}$ . Somit gibt es eine Matrixdarstellung

$$Au = b.$$



## Eigenschaften von $A$

- symmetrisch
- positiv definit
- nicht singulär
- tridiagonal

Aufwand zur Lösung des Gleichungssystems beträgt  $\mathcal{O}(m)$ , da es sich um eine Tridiagonalmatrix handelt und somit mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren lösen lässt.

# Zusatz: Definition Partielle Ableitung

Diskretisierung  
von Differentialgleichungen

Kevin Caldwell

Motivation

Diskretisierung

1D-Modell

2D-Modell

3D-Modell

Fazit

## Definition (Partielle Ableitung)

Sei  $U$  eine offene Teilmenge des euklidischen Raums  $\mathbb{R}^n$  und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion. Sei weiterhin ein Element  $a = (a_1, \dots, a_n)$  in  $U$  gegeben. Falls für die natürliche Zahl  $i$  mit  $1 \leq i \leq n$  der folgende Grenzwert existiert:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_i + h, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n)}{h}$$

dann nennt man ihn die partielle Ableitung von  $f$  nach der  $i$ -ten Variablen  $x_i$  im Punkt  $a$ . Die Funktion  $f$  heißt dann im Punkt  $a$  partiell differenzierbar.

Dabei ist

$$\Delta = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$$

der Laplace-Operator im  $n$ -dimensionalen euklidischen Raum

# Partielle Randwertaufgabe 2. Ordnung

Diskretisierung  
von Differential-  
gleichungen

Kevin Caldwell

Motivation

Diskretisierung

1D-Modell

2D-Modell

3D-Modell

Fazit

Wir betrachten jetzt die zu dieser gewöhnlichen Randwertaufgabe analoge partielle Randwertaufgabe im  $\mathbb{R}^2$ :

$$\begin{aligned} -\Delta u(x, y) &= f(x, y), & (x, y) \in \Omega &= [0, 1]^2 \subset \mathbb{R}^2 \\ u(x, y) &= g(x, y), & (x, y) \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

Die Funktionen  $f$  und  $g$  sind gegebene Funktionen. Gesucht ist eine Funktion  $u$  welche die "Poisson-Gleichung"

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f \quad \text{in } \Omega \tag{6}$$

und die "Dirichlet-Randbedingungen"

$$u = g \quad \text{auf } \partial\Omega \tag{7}$$

erfüllt.

# Rechengitter im 2D Fall

Diskretisierung  
von Differential-  
gleichungen

Kevin Caldwell

Motivation

Diskretisierung

1D-Modell

2D-Modell

3D-Modell

Fazit

Ganz analog zum eindimensionalen Fall approximieren wir die Differentialgleichung wieder auf einem geeigneten Gitter.

Dazu überdecken wir das abgeschlossene Einheitsquadrat  $\Omega = [0, 1]^2$  durch ein Gitter.

Mit der Schrittweite  $h = \frac{1}{m}$  erhalten wir die Gitterpunkte

$$\Omega_h = \{(x_i, y_j) \mid (x_i, y_j) = (ih, jh); i, j = 0, 1, \dots, m\} \subset \Omega$$

# Rechengitter im 2D Fall

Diskretisierung  
von Differential-  
gleichungen

Kevin Caldwell

Motivation

Diskretisierung

1D-Modell

2D-Modell

3D-Modell

Fazit

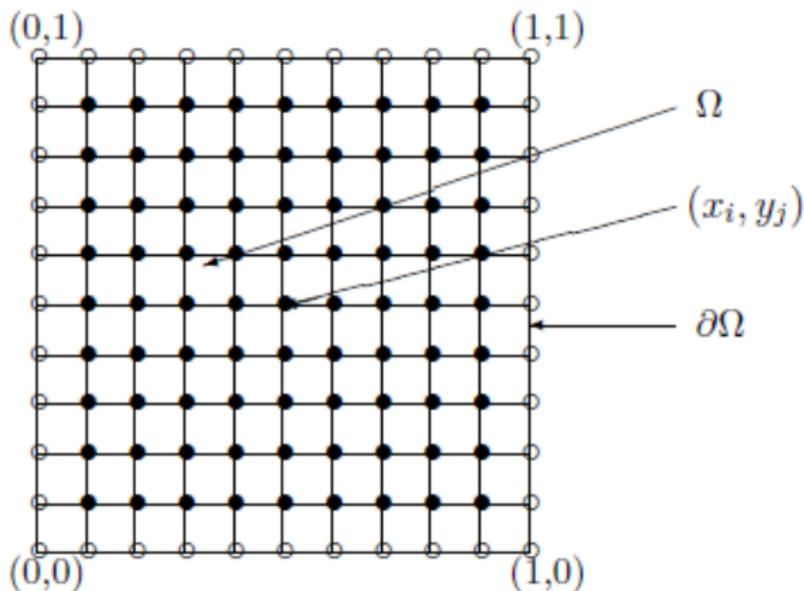


Abb.1: Diskretisierungsgitter im 2D Fall

# Approximation von $\Delta u$

Diskretisierung  
von Differentialgleichungen

Kevin Caldwell

Motivation

Diskretisierung

1D-Modell

2D-Modell

3D-Modell

Fazit

Analog zum eindimensionalen Fall approximieren wir die partiellen Ableitungen  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  und  $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$  durch die Näherungsformeln

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) \approx \frac{1}{h^2}(u(x-h, y) - 2u(x, y) + u(x+h, y))$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) \approx \frac{1}{h^2}(u(x, y-h) - 2u(x, y) + u(x, y+h)).$$

Durch Substitution beider Formeln in (6), erhalten wir folgende Approximation:

$$\frac{-u(x_{i-1}, y_j) + 2u(x_i, y_j) - u(x_{i+1}, y_j)}{h^2} + \frac{-u(x_i, y_{j-1}) + 2u(x_i, y_j) - u(x_i, y_{j+1})}{h^2}$$
$$\approx f(x_i, y_j)$$
$$\forall i, j = 1, \dots, m-1$$

# Resultierendes Gleichungssystem

Diskretisierung  
von Differential-  
gleichungen

Kevin Caldwell

Motivation

Diskretisierung

1D-Modell

2D-Modell

3D-Modell

Fazit

Hiermit können wir jetzt ein lineares Gleichungssystem für die diskrete Lösung

$$\frac{-u_{i-1,j} + 2u_{i,j} - u_{i+1,j}}{h^2} + \frac{-u_{i,j-1} + 2u_{i,j} - u_{i,j+1}}{h^2} = f_{i,j}$$

oder nach umstellen

$$-u_{i-1,j} - u_{i,j-1} + 4u_{i,j} - u_{i,j+1} - u_{i+1,j} = h^2 f_{i,j}, \quad i, j = 1, \dots, m$$

aufstellen.

# Resultierendes Gleichungssystem

Diskretisierung  
von Differential-  
gleichungen

Kevin Caldwell

Motivation

Diskretisierung

1D-Modell

2D-Modell

3D-Modell

Fazit

In unserer Gleichung gehen neben dem Gitterpunkt  $(x_i, y_j)$  die vier benachbarten Gitterpunkte ein.

Grafisch dargestellt ist diese Abhängigkeit in folgende Abbildung:

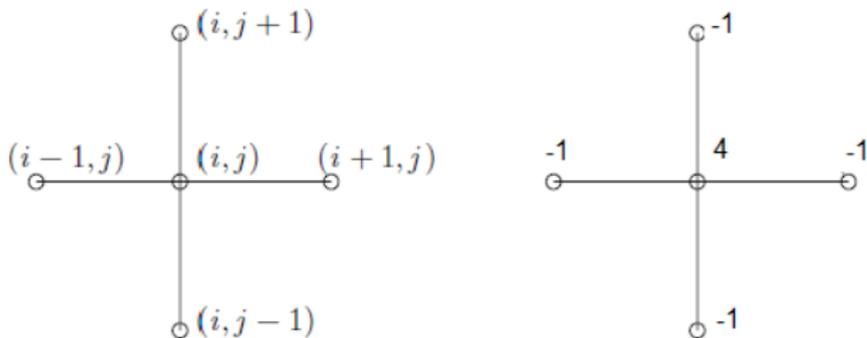


Abb.2: Fünf-Punkte-Differenzenstern

# Resultierendes Gleichungssystem

Diskretisierung  
von Differential-  
gleichungen

Kevin Caldwell

Motivation

Diskretisierung

1D-Modell

2D-Modell

3D-Modell

Fazit

Die Gleichungen sind linear, somit existiert wieder eine Matrixdarstellung.

$$Au = b$$

Diesmal mit  $(m - 1)^2$  Gleichungen und  $(m - 1)^2$  Unbekannten. Dabei ist der Spaltenvektor  $u$  geordnet als:

$$u^T = [u_{1,1}, \dots, u_{m-1,1}, u_{1,2}, \dots, u_{m-1,2}, \dots, u_{m-1,m-1}]$$

# Matrixdarstellung

Diskretisierung  
von Differential-  
gleichungen

Kevin Caldwell

Motivation

Diskretisierung

1D-Modell

2D-Modell

3D-Modell

Fazit

A kann als eine  $(m-1) * (m-1)$  Blockmatrix beschrieben werden.  
Die Blöcke sind  $(m-1) * (m-1)$  groß:

$$A = \begin{pmatrix} T & -I & & & & & \\ -I & T & -I & & & & \\ & -I & T & \ddots & & & \\ & & \ddots & \ddots & -I & & \\ & & & -I & T & -I & \\ & & & & -I & T \end{pmatrix}$$

wobei  $T =$

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & & & & & \\ -1 & 4 & -1 & & & & \\ & -1 & 4 & \ddots & & & \\ & & \ddots & \ddots & -1 & & \\ & & & -1 & 4 & -1 & \\ & & & & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

## Eigenschaften von A:

- A ist symmetrisch
- A ist positiv definit
- A ist nicht singulär
- Gleichungssystem ist für kleines h sehr groß:  $(m - 1)^2$  Gleichungen und Unbekannte
- je kleiner h, desto genauer die Approximation
- Matrix ist dünn besetzt ( $\leq 5$  Nichtnulleinträge pro Zeile)

# Direkte Lösungsverfahren

Diskretisierung  
von Differential-  
gleichungen

Kevin Caldwell

Motivation

Diskretisierung

1D-Modell

2D-Modell

3D-Modell

Fazit

Direkte Lösungsverfahren, wie z.B. das Gaußsche Eliminationsverfahren, versagen.

Bei einem feinen Gitter wird die Matrix  $A$  sehr groß. Für ein  $10 \times 10$ -Gitter hat man 100 Unbekannte, was schon zu einer  $100 \times 100$  Matrix führt. Nachteile sind:

- Hohe Rechenzeiten
- Der Algorithmus verändert die Struktur der Matrix
- Rundungsfehler können dominant werden
- Hoher Speicherbedarf

# Partielle Randwertaufgabe 2. Ordnung

Diskretisierung  
von Differential-  
gleichungen

Kevin Caldwell

Motivation

Diskretisierung

1D-Modell

2D-Modell

3D-Modell

Fazit

Die dreidimensionale "Poisson-Gleichung" folgt analog zu (6):

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f \quad \text{in } \Omega = [0, 1]^3 \quad (8)$$

mit den selben Randbedingungen wie in (7).

Diskretisierung von einem dreidimensionalen PDE wie diese führt zu einem sehr großen System von Gleichungen.

# Diskretisierung

Diskretisierung  
von Differential-  
gleichungen

Kevin Caldwell

Motivation

Diskretisierung

1D-Modell

2D-Modell

3D-Modell

Fazit

Verhalten wir uns wie in den vorherigen Beispielen, erhalten wir die Gleichungen

$$\begin{aligned} -u_{i-1,j,k} - u_{i,j-1,k} - u_{i,j,k-1} + 6u_{i,j,k} - u_{i,j,k+1} - u_{i,j+1,k} - u_{i+1,j,k} \\ = h^2 f_{i,j,k}, \\ i, j, k = 1, \dots, m-1 \end{aligned}$$

- Die vorgestellten Modelle waren elliptische Randwertprobleme einfacher Art.
- Es entstehen schwach besetzte Matrizen.
- Sie sind mit iterativen Lösungsverfahren schnell lösbar.