Wissenschaftliches Rechnen II

Sommersemester 2013
Prof. Dr. Burstedde
Patrick Diehl

universitätbonn

Übungsblatt 11.

Abgabe am **Dienstag (15.07.2013) vor der Vorlesung**.

Aufgabe 33. (DCU-Algorithmus [8 Punkte])

Betrachten Sie die Advektionsgleichung $q_t + q_x + q_y$ mit den initialen Daten:

$$Q^0_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{if } i + j \leq 0, \\ 0 & \text{if } i + j > 0 \end{cases}$$

für das Cauchyproblem $(-\infty < i, j < \infty)$. Es gilt $\triangle t = \triangle x = \triangle y$. Bestimmen Sie die Lösung $Q^1_{i,j}$ und $Q^2_{i,j}$ für den CTU- und den DCU-Algorithmus. Was stellen Sie fest?

Hinweis: Machen Sie eine Skizze des Gitters mit der initialen Belegung. Skizzieren Sie anhand des Gitters die Lösung $Q^1_{i,j}$ und $Q^2_{i,j}$

Aufgabe 34. (Diskrete Divergenzfreiheit [8 Punkte])

Zeigen Sie, dass bei diskreter Divergenzfreiheit (3.5.43)

$$\frac{1}{\triangle x}\left(u_{i+1/2,j} - u_{i-1/2,j}\right) + \frac{1}{\triangle y}\left(v_{i,j+1/2} - v_{i,j-1/2}\right)$$

die DCU-Methode exakt erhaltend ist, wenn der Gesamtfluss durch den Gebietsrand Null ist.

Aufgabe 35. (Strömungsfunktionen [4 Punkte])

Jede differenzierbare skalare Strömungsfunktion $\psi(x, y)$ kann verwendet werden, um ein zweidimensionales divergenzfreies Geschwindigkeitsfeld wie folgt zu definieren

$$u(x, y) = \psi_y(x, y)$$
$$v(x, y) = -\psi_x(x, y)$$

Sie haben die beiden Geschwindigkeiten $u(x, y) = \sin(x) + 2 \cdot y$ und $v(x, y) = -\cos(x) \cdot y$ gegeben. Bestimmen Sie unter diesen Angaben eine passende Strömungsfunktion $\psi(x, y)$.