Algorithmische Mathematik II, Stochastik für Lehramt

Sommersemester 2014
Prof. Dr. Jochen Garcke
Dr. Jutta Adelsberger

universität bonn

Übungsblatt 4.

Abgabe am **Montag, 5.5.2014**

Aufgabe 14. (Bonferroni-Ungleichung) (7 Punkte)

Es seien $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{A}$.

a) Zeigen Sie, dass

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) \geq \sum_{i=1}^{k} P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq k} P(A_i \cap A_j).$$

b) In jeder Packung Schokoriegel befindet sich eines von insgesamt n verschiedenen Bildern von Fußballspielern, darunter auch 11 Bilder von Spielern aus der Nationalmannschaft. Wer die Bilder aller 11 Nationalspieler gesammelt hat, gewinnt eine Reise zur Weltmeisterschaft. Um die Reise auf jeden Fall zu gewinnen, kauft Fred $3n$ Packungen Schokoriegel. Zeigen Sie, dass seine Wahrscheinlichkeit, tatsächlich die gewünschten Bilder zu erhalten, zwischen $1 - 11(1 - \frac{1}{n})^{3n}$ und $1 - 11(1 - \frac{1}{n})^{3n} + 55(1 - \frac{2}{n})^{3n}$ liegt. Welchen Wert haben diese Schranken ungefähr für große n?

Aufgabe 15. (Totale Wahrscheinlichkeit) (4 Punkte)

Ein Würfel wird sieben Mal geworfen, die Resultate seien $N, X_1, X_2, \ldots, X_6$. Anschließend bildet man die Summe $Z = \sum_{i=1}^{N} X_i$, deren Länge vom ersten Würfelwurf bestimmt ist. Was ist der Erwartungswert der Zufallsvariablen Z? Verwenden Sie den Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit.

Aufgabe 16. (Erwartungswert) (4 Punkte)

Zeigen Sie:

a) Für $X, Y \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ gilt $E(|XY|) \leq E^{\frac{1}{2}}(X^2)E^{\frac{1}{2}}(Y^2) < \infty$. Verwenden Sie die Cauchy-Schwarz-Ungleichung.

b) Durch $(X, Y)_{\mathcal{L}^2} := E(XY)$ ist eine positiv semidefinite symmetrische Bilinearform (ein sogenanntes Skalarprodukt) auf dem Vektorraum $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ definiert.

Aufgabe 17. (Wahlhochrechnungsmodell) (5 Punkte)

Gegeben seien $d+1$ Parteien (inkl. einer „ungültigen“) und N Wahlzettel. Auf jedem der Zettel ist eine Stimme für eine der Parteien. Sei r_i die Zahl der Wahlzettel für die Partei i, $0 \leq i \leq d$, und somit $r_0 + \ldots + r_d = N$. Es werden n Zettel zufällig herausgegriffen und gezählt. Es seien $p_i := \frac{r_i}{N}$ sowie Y_i die Anzahl der gezählten Stimmen für die Partei i, also $Y_0 + \ldots + Y_d = n$. Zeigen Sie

$$P\left(\bigcup_{i=0}^{d} \left\{\left|\frac{Y_i}{n} - p_i\right| \geq \varepsilon\right\}\right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2 n}.$$

Hinweis: Verwenden Sie den Ansatz $Y_i = \sum_{m=1}^{n} X_i(x_m)$ mit der Zufallsvariablen $X_i(x_m) := \begin{cases} 1 & \text{falls Zettel } x_m \text{ für Partei } i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ sowie die Tschebyscheff-Ungleichung.

Gesamtpunktzahl: 20 Punkte