Aufgabe 9: Berechnen Sie folgende Integrale mit Hilfe partieller Integration:

$$\text{a)} \int_0^\pi e^x \sin(3x)\,dx\,, \quad \text{b)} \int_0^\pi \sin^4 x\,dx\;,$$
$$\text{c)} \int_{-\pi}^\pi \sin^5 x\,dx\;, \quad \text{d)} \int_0^\pi \sin^2 x \cos^2 x\,dx\;.$$

LÖSUNG:

a) $\int\limits_0^\pi e^x \sin(3x)\,dx = \frac{3}{10}(e^\pi + 1)$. Denn: Partielle Integration mit

$$f(x) = e^x,\ f'(x) = e^x,\ g(x) = \sin(3x),\ g'(x) = 3\cos(3x)$$

ergibt:

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi e^x \sin(3x)\,dx &= e^x \sin(3x)|_0^\pi - 3\int_0^\pi e^x \cos(3x)\,dx \\
&= e^\pi \underbrace{\sin(3\pi)}_{=0} - e^0 \underbrace{\sin(3\cdot 0)}_{=\sin(0)=0} - 3\int_0^\pi e^x \cos(3x)\,dx \\
&= -3\int_0^\pi e^x \cos(3x)\,dx \\
&= -3e^x \cos(3x)|_0^\pi - 9\int_0^\pi e^x \sin(3x)\,dx \qquad (*) \\
&= -3e^\pi \underbrace{\cos(3\pi)}_{=\cos(\pi)=-1} + 3e^0 \underbrace{\cos(3\cdot 0)}_{=\cos(0)=1} - \\
&\qquad 9\int_0^\pi e^x \sin(3x)\,dx \\
&= 3(e^\pi + 1) - 9\int_0^\pi e^x \sin(3x)\,dx.
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\ 10\int_0^\pi e^x \sin(3x)\,dx = 3(e^\pi + 1).\ \Rightarrow\ \text{Beh.!}$$

(*) Partielle Integration mit: $f(x) = e^x,\ f'(x) = e^x,\ g(x) = \cos(3x),\ g'(x) = -3\sin(3x)$.

b) $\int\limits_0^\pi \sin^4 x\, dx = \frac{3\pi}{8}$. Denn: Partielle Integration mit

$$f(x) = -\cos x,\ f'(x) = \sin x,\ g(x) = \sin^3 x,\ g'(x) = 3\sin^2 x \cos x$$

ergibt:

$$\begin{aligned}
\int\limits_0^\pi \sin x \sin^3 x\, dx &= -\cos x \sin^3 x|_0^\pi + 3\int\limits_0^\pi \cos^2 x \sin^2 x\, dx \\
&= 3\int\limits_0^\pi \cos^2 x \sin^2 x\, dx \qquad (\text{da } \sin 0 = \sin x = 0) \\
&= 3\int\limits_0^\pi (1-\sin^2 x)\sin^2 x\, dx \qquad (\cos^2 x + \sin^2 x = 1\,!) \\
&= 3\int\limits_0^\pi \sin^2 x\, dx - 3\int\limits_0^\pi \sin^4 x\, dx. \\
\Rightarrow \int\limits_0^\pi \sin^4 x\, dx &= \frac{3}{4}\int\limits_0^\pi \sin^2 x\, dx. \\
\int\limits_0^\pi \sin^2 x\, dx &= \int\limits_0 \sin x \sin x\, dx \\
&= -\cos x \sin x|_0^\pi + \int\limits_0^\pi \cos^2 x\, dx \\
&= \int\limits_0 \cos^2 x\, dx \quad (-\cos x \sin x|_0^\pi = 0,\ \text{da}\ \sin 0 = \sin\pi = 0) \\
&= \int\limits_0^\pi 1\, dx - \int\limits_0^\pi \sin^2 x\, dx \\
&= \pi - \int\limits_0^\pi \sin^2 x\, dx. \\
\Rightarrow \int\limits_0^\pi \sin^2 x\, dx &= \frac{\pi}{2}, \quad \text{und} \quad \int\limits_0^\pi \sin^4 x\, dx = \frac{3}{4}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{8}.
\end{aligned}$$

c) $\int\limits_{-\pi}^\pi \sin^5 x\ dx = 0$, da $f(x) = \sin^5 x$ ungerade ist: $f(-x) = [\sin(-x)]^5 = [-\sin x]^5 = -\sin^5 x = -f(x)$.

d) Nach b) gilt (Zwischenergebnis dort):

$$\int_0^\pi \sin^2 x \cos^2 x \, dx = \frac{1}{3} \int_0^\pi \sin^4 x \, dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{3\pi}{8} = \frac{\pi}{8} .$$

Aufgabe 10: Geben Sie die Formel für die Taylorentwicklung dritter Ordnung einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ im Punkt $x = 1$ an. Wenden Sie diese Formel auf $f(x) = \sin(\pi x)$.

Lösung:

$$f(y) = f(1) + f'(1)(y-1) + \frac{1}{2} f''(1)(y-1)^2 + \frac{1}{6} f'''(1)(y-1)^3 + O((y-1)^4)$$

Mit $f(x) = \sin(\pi x)$ ergibt sich

$$f(y) = -\pi(y-1) + \frac{\pi^3}{6}(y-1)^3 + O((y-1)^4)$$

Aufgabe 11:

- Berechnen Sie die Taylorentwicklung der Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

  um die Stelle 0 bis zur Ordnung 4, das heißt mit Restglied fünfter Ordnung.

- Welche Regelmäßigkeit lässt sich erkennen? Stellen Sie eine Vermutung für die weiteren Terme der Entwicklung auf.

- Stellen Sie die zu approximierende Funktion f sowie alle errechneten (und vermuteten) Taylor-Polynome aufsteigender Ordnung graphisch mit Hilfe eines geeigneten Programms dar.

Lösung:

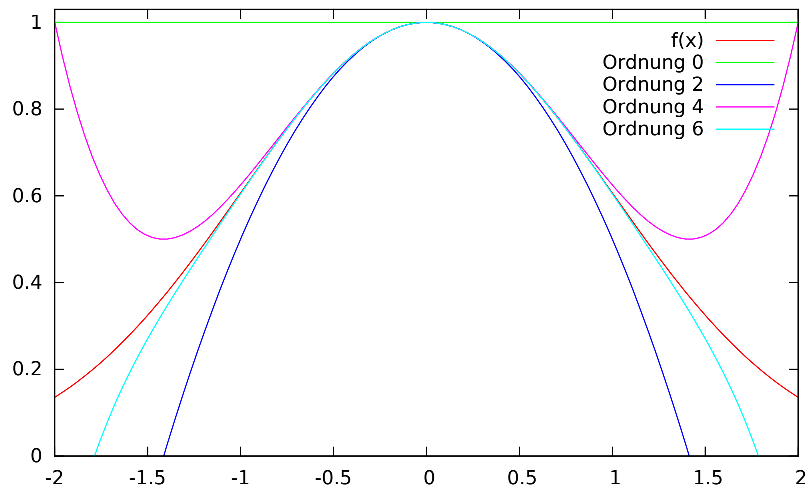
-

$$\begin{aligned}
f'(x) &= -\, x \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \\
f''(x) &= -\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) + x^2 \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \\
f^{(3)}(x) &= x \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) + 2x \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) - x^3 \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \\
f^{(4)}(x) &= \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) - x^2 \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) + 2 \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \\
&\quad - 2x^2 \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) - 3x^2 \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) + x^4 \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(x) = 1 + 0x + \frac{1}{2}(-1+0)\,x^2 + \frac{1}{6}(0+0-0)\,x^3 + \frac{1}{24}(1-0+2-0-0+0)\,x^4 + O(x^5)$$
$$= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + O(x^5)$$

- Es handelt sich um die Exponentialreihe mit Argument $-\frac{x^2}{2}$, d.h.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(-\frac{x^2}{2}\right)^n = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} - \frac{x^6}{48} + \dots$$

- 

Aufgabe 12: Zwischen geographischer Breite B und reduzierter Breite β besteht der Zusammenhang

$$\beta = \arctan(\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\tan B),$$

wobei

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

die numerische Exzentrizität des Erdellipsoids mit Halbachsen a und b ist.
Entwickeln Sie die Differenz $\beta - B$ nach Potenzen von ε mit einem Fehlerterm $O(\epsilon^4)$.
Anleitung: Wir definieren $w := \tan\beta$ und $w_0 := \tan B$. Damit läßt sich die Differenz schreiben als

$$\begin{aligned} \beta - B &= \arctan\left(\sqrt{1-\epsilon^2}\,\tan B\right) - B \\ &= \arctan w - \arctan w_0. \end{aligned}$$

- Entwickeln Sie $\arctan(w)$ um w_0 bis zum Fehlerterm $O(|w-w_0|^2)$.
- Um $w - w_0$ darzustellen entwickeln Sie $f(\epsilon) = \sqrt{1-\epsilon^2}$ um den Punkt 0 bis $O(\epsilon^4)$.

Lösung:

$$\frac{d}{dx}\arctan x = \frac{1}{1+x^2}$$

Entwickeln wir die Funktion $\arctan w$ um w_0 so erhalten wir also

$$\arctan w = \arctan w_0 + \frac{1}{1+w_0^2}(w-w_0) + O\left(|w-w_0|^2\right)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \beta - B &= \arctan w - \arctan w_0 \\ &= \frac{w-w_0}{1+w_0^2} + O(|w-w_0|^2) \end{aligned}$$

Da sich die Differenz $w - w_0$ schreiben läßt als

$$\begin{aligned} w - w_0 &= \tan\beta - \tan B \\ &= \sqrt{1-\epsilon^2}\tan B - \tan B \qquad (1) \end{aligned}$$

entwickeln wir $\sqrt{1-\epsilon^2}$.

$$\begin{aligned} f(x) &:= \sqrt{1-x^2} \\ f(\epsilon) &= f(0) + f'(0)\epsilon + \frac{f''(0)}{2}\epsilon^2 + \frac{f'''(0)}{6}\epsilon^3 + O(\epsilon^4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \\ f''(x) &= -\frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} \\ f'''(x) &= -\frac{3x}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{1-\epsilon^2} = 1 - \frac{\epsilon^2}{2} + O(\epsilon^4)$$

Eingesetzt in (1) ergibt das

$$\begin{aligned} w - w_0 &= \left(1 - \frac{\epsilon^2}{2} + O(\epsilon^4)\right)\tan B - \tan B \\ &= -\frac{\epsilon^2}{2}\tan B + O(\epsilon^4) \end{aligned}$$

Daran sieht man auch $w - w_0 = O(\epsilon^2)$.
Die Entwicklung der Differenz $\beta - B$ nach Potenzen von ε mit einem Fehlerterm $O(\epsilon^4)$ sieht also wie folgt aus

$$\begin{aligned} \beta - B &= \frac{-\frac{\epsilon^2}{2}\tan B + O(\epsilon^4)}{1+\tan^2 B} + \underbrace{O\left(|w-w_0|^2\right)}_{=O(\epsilon^4)} \\ &= \left(-\frac{\epsilon^2}{2}\right)\frac{\tan B}{1+\tan^2 B} + O(\epsilon^4). \end{aligned}$$