Aufgabe 30: Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

und $B = A - 4\mathbb{1}$.

Aufgabe 31: Bestimmen Sie zur Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

eine Matrix $\mathbf{P}$ so, dass $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ eine Diagonalmatrix ist.
Tipp: Wenn die Spalten von $\mathbf{P}$ Eigenvektoren von $\mathbf{A}$ sind, so gilt wie bei symmetrischen Matrizen $\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{P}\mathbf{D}$, wobei $\mathbf{D}$ eine Diagonalmatrix aus den entsprechenden Eigenwerten von $\mathbf{A}$ ist. Man muss also geeignet viele linear unabhängige Eigenvektoren finden, so dass $\mathbf{P}$ invertierbar ist.
Probieren Sie die Teiler des konstanten Gliedes um die erste Nullstelle des charakteristischen Polynoms zu bestimmen.

Aufgabe 32: Welche Aussagen sind richtig?

a) Jede diagonalisierbare $n \times n$ Matrix hat n linear unabhängige Eigenvektoren. ja ☐ nein ☐

b) Jede diagonalisierbare $n \times n$ Matrix hat n verschiedene Eigenwerte. ja ☐ nein ☐

c) Jede symmetrische $n \times n$ Matrix hat n verschiedene Eigenwerte. ja ☐ nein ☐

d) Jede symmetrische Matrix ist diagonalisierbar. ja ☐ nein ☐

e) Jede 2×2 Spiegelungsmatrix ist diagonalisierbar. ja ☐ nein ☐

Aufgabe 33: Gegeben ist das Skalarprodukt

$$g(v, w) = \int_0^{2\pi} v(x)w(x)\,dx$$

auf dem Raum der stetigen Funktionen auf dem Intervall $[0, 2\pi]$.

a) Man zeige, dass die Funktionen 1, $\cos(x)$ und $\cos(2x)$ richtig skaliert ein ON-System bilden. Was ist die Skalierung?
Tipp: $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$

b) Betrachten Sie die Funktion $f(x) = \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{2} - \frac{\cos(2x)}{3}\right)$. Stellen Sie die Funktion in Termen der obigen Basis dar und berechnen Sie mit Hilfe der Orthonormalität $\|f\|_g^2 = g(f, f)$.