Institut für angewandte Mathematik,
Institut für numerische Simulation
Sommersemester 2015
Prof. Dr. Anton Bovier, Prof. Dr. Martin Rumpf

universitätbonn

Klausur zur Vorlesung „Algorithmische Mathematik II"

Bitte diese Felder in Druckschrift ausfüllen

Name:		Vorname:	
Matrikelnr.:			

Wichtige Hinweise:

- Taschenrechner, Handys u.ä. sind nicht zugelassen
- Dieses Deckblatt ist vollständig ausgefüllt zusammen mit den Lösungen abzugeben. Jedes abgegebene Blatt ist zudem mit Namen und Matrikelnummer zu versehen.
- Bitte beachten Sie, dass nur Punkte auch im Falle von Rechenfehlern vergeben werden können, wenn aus Ihren Kommentaren zu den Rechnungen der Lösungsweg klar erkennbar sein sollte.
- Bitte den Studentenausweis und einen amtlichen Lichtbildausweis bereithalten.
- Bearbeitungszeit 120 Minuten.

Viel Erfolg!

Diese Felder NICHT ausfüllen:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	**Tot./60**	**Note**
Punkte								

1. Würfelspiel [3+3+4 Pkt]

Beim Würfelspiel "2 und 12" werden zwei Würfel gleichzeitig geworfen. Die Bank zahlt dem Spieler das Zehnfache der Augensumme in Cent aus, wenn diese 2 oder 12 ist. Bei der Augensumme 3 oder 11 erhält der Spieler das Fünffache in Cent und dei der Augensumme 4 oder 10 das Doppelte in Cent. Bei den Augensummen 5 bis 9 wird soviel in Cent ausbezahlt, wie die Augensumme angibt.

a) Beschreiben Sie dieses Modell durch einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum.

b) Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariablen $X =$"Auszahlung der Bank" an.

c) Welchen Einsatz muss die Bank mindestens verlangen, damit sie längerfristig keinen Verlust macht?

Lösung

a) $\Omega = \{1, \dots, 6\}^2$; $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$.

Das Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ ist die Gleichverteilung auf Ω: $\mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{36}$ für $\omega \in \Omega$.

b) Durch das bestimmen der Anzahl von Elementen $\omega \in \Omega$, die zu einer bestimmten Augensumme führen erhält man:

k	5	6	7	8	9	15	20	55	120
$\mathbb{P}(X = k)$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36} + \frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36} + \frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Für alle anderen Werte von $k \in \mathbb{R}$ gilt $\mathbb{P}(X = k) = 0$.

c) Damit die Bank längerfristig keinen Verlust macht, muss sie mindestens den Erwartungswert der Auszahlung verlangen.

Diesen berechnet man wie folgt, da nach obiger Überlegung $\mathbb{P}(X = k) = 0$ für $k \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \sum_{k \in \mathbb{N}} k\mathbb{P}(X = k) \\
&= \frac{1}{36}(20 + 30 + 42 + 64 + 36 + 30 + 80 + 110 + 120) \\
&= \frac{532}{36} = 14 + \frac{28}{36} = 14 + \frac{7}{9}.
\end{aligned}$$

Die Bank muss, da Cents die kleinste Einheit sind, mindestens 15 cent verlangen.

2. Bedingte Erwartungswerte

[3+3+4 Pkt]

a) Wir betrachten den Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, wobei Ω eine endliche Menge ist. Es seien $A, B \in \mathcal{F}$ zwei Ereignisse. Definieren Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit von A gegeben B.

b) $\{X_i, i \geq 1\}$ sei eine Folge von unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit Erwartungswert μ. Zudem sei N eine Zufallsvariable mit Werten in $\mathbb{N}$, welche unabhängig von $\{X_i, i \geq 1\}$ ist und einen endlichen Erwartungswert besitzt.

   i) Berechnen Sie für $n \in \mathbb{N}$ den bedingten Erwartungswert $\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^N X_i | N = n\right]$.

   Erinnerung: Der bedingte Erwartungswert ist der Erwartungswert bezüglich des bedingten Wahrscheinlichkeitsmaßes.

   ii) Beweisen Sie, dass

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N} X_i\right] = \mu \mathbb{E}[N].$$

Lösung

a) Sei $\mathbb{P}(B) > 0$.

   Dann heisst

$$\mathbb{P}(A|B) \equiv \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

   die bedingte Wahrscheinlichkeit von A gegeben B.

b) i) Da Ω eine endliche Menge ist und N Werte in $\mathbb{N}$ annmmt, kann $\sum_{i=1}^N X_i$ nur abzählbar viele Werte annehmen. Bezeichne die Menge der möglichen Werte mit $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}$. Nach der Definition des Erwarungswertes haben wir (falls die rechte Seite endlich ist, was wir automatisch zeigen)

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N} X_i | N=n\right] &= \sum_{\omega\in\mathbb{R}} \omega \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i = \omega | N=n\right) \\
&= \sum_{\omega\in\mathcal{S}} \omega \frac{\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i = \omega, N=n\right)}{\mathbb{P}(N=n)} \\
&= \sum_{\omega\in\mathcal{S}} \omega \frac{\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i = \omega, N=n\right)}{\mathbb{P}(N=n)} \\
&= \sum_{\omega\in\mathcal{S}} \omega \frac{\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i = \omega\right)\mathbb{P}\left(N=n\right)}{\mathbb{P}(N=n)} \\
&= \sum_{\omega\in\mathcal{S}} \omega \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i = \omega\right) \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] \\
&= n\mathbb{E}[X_1] = n\mu,
\end{aligned}
$$

wobei wir zunächst die Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit verwendet haben und anschließend die Unabhängigkeit der $\{X_i, i \geq 1\}$ und N.

ii) Wir haben

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N} X_i\right] &= \sum_{\omega\in\mathcal{S}} \omega \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i = \omega\right) \\
&= \sum_{\omega\in\mathcal{S}} \omega \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i = \omega | N=n\right) \mathbb{P}\left(N=n\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{\omega\in\mathcal{S}} \omega \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i = \omega | N=n\right)\right) \mathbb{P}\left(N=n\right) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N} X_i | N=n\right] \mathbb{P}\left(N=n\right),
\end{aligned}
$$

wobei hier zunächst die Definition des Erwartungswertes und dann das Gesetz der Totalen Wahrscheinlichkeit verwenbdet wurde. Die Summen dürfen wir vertauschen da nur abzählbar viele der Summanden ungleich null sind (Ω ist eine endliche Menge). Nun erhalten wir mit Teil i),dass

$$
\begin{aligned}
\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N} X_i | N=n\right] \mathbb{P}\left(N=n\right) &= \sum_{n\in\mathbb{N}} n\mu \mathbb{P}\left(N=n\right) \\
&= \mu \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}\left(N=n\right) = \mu\mathbb{E}[N].
\end{aligned}
$$

3. Experiment *[2+8 Pkt]*

Ein Experiment werde durch eine Markovkette mit zwei Zuständen r und s, und der Übergangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ q & 1-q \end{pmatrix}$$

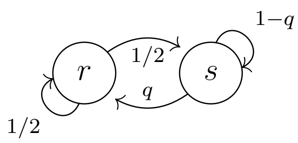
mit dem unbekannten Parameter $0 \leq q \leq 1$ beschrieben.

a) Zeichnen Sie den zur Markovkette gehörigen Graphen.

b) Das Experiment wird viele Male für jeweils lange Zeit ausgeführt, und man beobachtet, dass der Ausgang in 40 % der Fälle durch den Zustand r, und in den restlichen 60 % der Fälle durch s beschrieben wird. Bestimmen Sie den Parameter q und begründen Sie ihr Vorgehen.

Lösung

a)



b) Wir bestimmen zunächst Gleichgewichte der Kette. μ ist Gleichgewicht genau dann wenn:

$$\mu(r) = \frac{1}{2} \cdot \mu(r) + q \cdot \mu(s) \ ,$$
$$\mu(s) = (1-q) \cdot \mu(s) + \frac{1}{2} \cdot \mu(r) \ ,$$

sowie $\mu(r) + \mu(s) = 1$. Daraus folgt

$$\mu(r) = \frac{2q}{1+2q} \ , \qquad \mu(s) = \frac{1}{1+2q} \ ,$$

die Kette besitzt also ein eindeutiges Gleichgewicht.

Nach Ausführen des Experiments für lange Zeit erwartet man ein Ergebnis verteilt nach μ nach dem Konvergenzsatz für Markovketten/Ergodensatz für die Frequenzen. Nach dem Gesetz der großen Zahlen/Ergodensatz sollte daher bei vielmaliger Wiederholung gelten:

$$\frac{\#\text{Ausgänge r}}{\#\text{Versuche}} \approx \mu(r) \ , \quad \frac{\#\text{Ausgänge s}}{\#\text{Versuche}} \approx \mu(s) \ .$$

Damit folgt $\mu(r) = (1+2q)^{-1} \approx 0.6$ und wir folgern $q = 1/3$.

4. Operatornorm

[3+3+4 Pkt]

a) Definieren Sie zu einer Norm $x \mapsto \|x\|$ auf dem $\mathbb{R}^n$ die Operatornorm $\mathbf{A} \mapsto |||\mathbf{A}|||$ für $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$.

b) Zeigen Sie: Für $n > 1$ ist die Frobenius-Norm $||\mathbf{A}||_F = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2}$ keine Operatornorm.

   Hinweis: Betrachten Sie die Identitätsmatrix $\mathbb{1} \in \mathbb{R}^{n,n}$.

c) Zeigen Sie, dass für eine Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ die zugehörige Operatornorm zur Norm $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$ gegeben ist durch $|||\mathbf{A}|||_1 = \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$.

Lösung

(a) $|||\mathbf{A}||| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|\mathbf{A}x\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|\mathbf{A}x\|$.

(b) Es gilt immer $|||\mathbb{1}||| = \sup_{\|x\|=1} \|\mathbb{1}x\| = \sup_{\|x\|=1} \|x\| = 1$, jedoch $||\mathbb{1}||_F = \sqrt{n}$.

(c) Sei $x \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x\|_1 = 1$, d.h. $\sum_{j=1}^n |x_j| = 1$.

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{A}x\|_1 &= \sum_{i=1}^n |\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j| \le \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \cdot |x_j| = \sum_{j=1}^n |x_j| \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \\
&\le \sum_{j=1}^n |x_j| \max_k \sum_{i=1}^n |a_{ik}| = \max_k \sum_{i=1}^n |a_{ik}|
\end{aligned}$$

Sei nun m der Index, so dass $\sum_{i=1}^n |a_{im}| = \max_k \sum_{i=1}^n |a_{ik}|$. Dann gilt für $e_m \in \mathbb{R}^n$: $\|e_m\|_1 = 1$ und $\|\mathbf{A}e_m\|_1 = \sum_{i=1}^n |a_{im}|$, also

$$|||\mathbf{A}|||_1 = \sup_{\|x\|=1} \|\mathbf{A}x\|_1 \ge \|\mathbf{A}e_m\|_1 = \sum_{i=1}^n |a_{im}| = \max_k \sum_{i=1}^n |a_{ik}| \,.$$

5. Gerschgorin *[4+4+2 Pkt]*

a) Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{I,I}$, $\mathbf{A} = (a_{ij})_{i,j\in I}$ und $r_i = \sum_{j\neq i} |a_{ij}|$. Geben Sie das Lemma von *Gerschgorin* an, d.h. formulieren Sie die beiden Aussagen für die Lage der Eigenwerte von $\mathbf{A}$.

b) Geben Sie mit Hilfe des Lemmas von *Gerschgorin* eine möglichst genaue Abschätzung der Eigenwerte von

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

an.

c) Können Sie aus (b) folgern, dass $\mathbf{B}$ invertierbar ist?

Lösung

(a) (i) Alle Eigenwerte von $\mathbf{A}$ liegen in

$$\bigcup_{i\in I} \overline{B_{r_i}(a_{ii})}$$

(ii) Für $I_i = \{j \in I \,:\, i \text{ mit } j \text{ verbunden }\}$ liegen alle Eigenwerte von $\mathbf{A}$ in

$$\bigcup_{i\in I} \Big\{ B_{r_i}(a_{ii}) \cup \Big(\bigcap_{j\in I_i} \partial B_{r_j}(a_{jj}) \Big) \Big\}$$

(b) Es gilt für $\mathbf{B} = (b_{ij})_{i,j}$:

- $b_{22} = b_{33} = b_{44} = 2$ und $r_2 = r_4 = 1$, $r_3 = 2$, also
$$B_1(2) = B_{r_2}(b_{22}) = B_{r_4}(b_{44}) \subset B_{r_3}(b_{33}) = B_2(2)$$
- $I_2 = I_3 = I_4 = \{2, 3, 4\}$, also
$$\bigcap_{j\in I_i} \partial B_{r_j}(b_{jj}) = \emptyset \text{ für } i = 2, 3, 4$$

Damit folgt insgesamt, dass alle Eigenwerte im offenen Ball $B_2(2)$ liegen.

(c) Da alle Eigenwerte im offenen Ball $B_2(2)$ liegen, ist 0 kein Eigenwert. Also ist $\mathbf{B}$ invertierbar.

6. De Casteljau *[3+3+4 Pkt]*

a) Geben Sie das *De Casteljau* - Schema zur rekursiven Darstellung der partiellen Polynome $b_i^k(t)$ an, wobei

$$b_i^0(t) = b_i \in \mathbb{R}^d\,, \quad b_i^k(t) = \sum_{j=0}^{k} b_{i+j} B_j^k(t)\,.$$

Hier bezeichnet $t \mapsto B_i^n(t)$ das i-te Bernsteinpolynom vom Grad n auf $[0,1]$. Die durch die Kontrollpunkte $b_0, \ldots, b_n$ definierte Bézierkurve ist gegeben durch $B(t) = \sum_{i=0}^n b_i B_i^n(t)$.

b) Berechnen Sie für die drei Kontrollpunkte

$$P_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix}$$

die Auswertung des quadratischen Beziérpolynoms an der Stelle $t = \frac{1}{4}$ mit Hilfe des *De Casteljau* - Schemas.

c) Schreiben Sie einen Programmcode, der für drei gegebene Punkte $P_0, P_1, P_2 \in \mathbb{R}^2$ und ein $t \in [0,1]$ die Auswertung $B = B(t) \in \mathbb{R}^2$ der quadratischen Bézierkurve $B(t) = \sum_{i=0}^2 P_i B_i^2(t)$ mit Hilfe des *De Casteljau* - Schemas berechnet.

Hinweis: Der Code muss in einer Sprache geschrieben sein, die Sie auch in den Programmieraufgaben verwendet haben und kompilierbar sein. Sie dürfen z.B. das gegebene C++ Codefragment vervollständigen.

Lösung

(a)

$$b_i^k(t) = (1-t) b_i^{k-1}(t) + t\, b_{i+1}^{k-1}(t)\,, \quad 1 \le k \le n\,, \quad 0 \le i \le n-k$$

(b) Setze $P_k^{(0)} = P_k$ für $k = 0, \ldots, 2$.

$$P_0^{(1)} = (1 - \frac{1}{4}) P_0^{(0)} + \frac{1}{4} P_1^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$P_1^{(1)} = (1 - \frac{1}{4}) P_1^{(0)} + \frac{1}{4} P_2^{(0)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$$
$$P_0^{(2)} = (1 - \frac{1}{4}) P_0^{(1)} + \frac{1}{4} P_1^{(1)} = \frac{3}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\frac{1}{4} \\ 3\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Die Auswertung ist gegeben durch $B(\frac{1}{4}) = P_0^{(2)} = (2\frac{1}{4}\,,\, 3\frac{1}{2})^T$.

```
// Berechne fuer drei 2D-Kontrollpunkte P0, P1, P2 die Auswertung B
// der Beziérkurve an der Stelle t.
void deCasteljau ( double B[2], double P[3][2], double t ){
  // kopiere 3 Kontrollpunkte in double Werte,
  // die im Algorithmus sukzessive ueberschrieben werden (können)
  double pp[3][2] = {{P[0][0], P[0][1]}, {P[1][0], P[1][1]}, {P[2][0], P[2][1]}};

  // de-Casteljau Algorithmus fuer quadratische Beziérkurven:
  // berechne die Auswertung B(t) und schreibe B(t) in B
  // (In den nächsten Zeilen Code einfügen!)
    for ( int j = 0; j < 2; ++j )
      for ( int k = 0; k < 2 - j; ++k )
        for ( int i = 0; i < 2; ++i )
          pp[k][i] = (1 - t) * pp[k][i] + t * pp[k + 1][i];

    for ( int i = 0; i < 2; ++i )
      B[i] = pp[0][i];

}
```