Institut für Numerische Simulation
Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

universitätbonn

Übungen zu Algorithmische Mathematik (V1G6)

Sommersemester 2015

Prof. Dr. Martin Rumpf — Dr. Orestis Vantzos — Dipl.-Math. Behrend Heeren

Übungsblatt 1 — Abgabe: 08. Juni 2015

Aufgabe 1 (Lagrange Basisfunktionen)

Gegeben sind $t_0, t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $t_i \neq t_j$ für $i \neq j$, ferner sein $L_i(t) = \prod_{j \neq i} \frac{t - t_j}{t_i - t_j}$ für $i = 0, \dots, n$. Zeigen Sie: $\{L_i \,|\, i = 0, \dots, n\}$ ist eine Basis des Raums der Polynome vom Grad kleiner oder gleich n.

Lösung

Es gilt $L_i(t_j) = \delta_{ij}$, denn

$$L_i(t_i) = \prod_{j \neq i} \frac{t_i - t_j}{t_i - t_j} = 1\,,$$

$$L_i(t_k) = \prod_{j \neq i} \frac{t_k - t_j}{t_i - t_j} = \Big(\prod_{k \neq j \neq i} \frac{t_k - t_j}{t_i - t_j} \Big) \cdot \frac{t_k - t_k}{t_i - t_k} = 0 \quad \text{für } k \neq i\,.$$

Sei $\mathscr{P}_n$ der Raum der Polynome vom Grad kleiner oder gleich n und $p \in \mathscr{P}_n$. Setze $p_i = p(t_i)$ für $i = 0, \dots, n$ und $q(t) := \sum_{i=0}^n p_i L_i(t)$. Da $L_i \in \mathscr{P}_n$ für $i = 0, \dots, n$ ist auch $q \in \mathscr{P}_n$.
Aufgrund der obigen Eigenschaft $L_i(t_j) = \delta_{ij}$ gilt $p(t_i) = q(t_i)$ für $i = 0, \dots, n$, d.h. p und q stimmen an $n+1$ Stellen überein. Da $p, q \in \mathscr{P}_n$ gilt also $p = q$, somit ist $\mathscr{L}_n = \{L_i \,|\, i = 0, \dots, n\}$ Erzeugendensystem von $\mathscr{P}_n$ und $\dim \mathscr{L}_n \geq n+1$. Also gilt $\dim \mathscr{L}_n = n+1$ und somit $\dim \mathscr{P}_n = \dim \mathscr{L}_n$, d.h. $\mathscr{L}_n$ ist Basis von $\mathscr{P}_n$.

Aufgabe 2

Verwenden Sie kubische Bezier-Kurven um ein linienförmiges, kalligrafisches $\mathcal{g}$ zu gestalten. Tragen Sie die Kontrollpunkte ein und spezifizieren Sie, an welchen Punkten Differenzierbarkeit der Gesamtkurve sicher gestellt ist.

Aufgabe 3 (Basiswechsel)

Betrachten Sie für Polynome vom Grad 3 die monomiale Basis $\{1, t, t^2, t^3\}$ und die Bernsteinbasis $\{B_0^3(t), B_1^3(t), B_2^3(t), B_3^3(t)\}$ bezüglich des Intervalls $[0, 1]$. Bestimmen Sie die Matrizen für den Basiswechsel.

Lösung

$$B_0^3(t) = (1-t)^3 = -t^3 + 3t^2 - 3t + 1$$

$$B_1^3(t) = 3t^3 - 6t^2 + 3t$$

$$B_2^3(t) = 3(1-t)t^2 = -3t^3 + 3t^2$$

$$B_3^3(t) = t^3$$

Sei $\mathscr{A} = \{1, t, t^2, t^3\}$ und $\mathscr{B} = \{B_0^3(t), B_1^3(t), B_2^3(t), B_3^3(t)\}$. Dann ist

$$\mathscr{M}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{A}} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

die Matrix für den Basiswechsel von $\mathscr{B}$ nach $\mathscr{A}$.

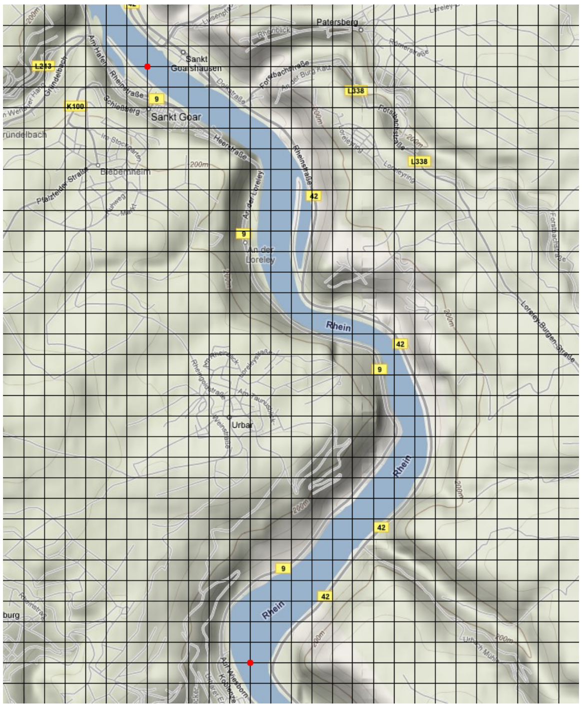
$$\mathscr{M}_{\mathscr{A}}^{\mathscr{B}} = \left(\mathscr{M}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{A}}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4 (Programmieraufgabe, Abgabe bis 15. Juni 2015)

Implementieren Sie den De-Casteljau-Algorithmus und schreiben Sie ein Programm, welches den Kurs eines Schiffes durch den Rhein vorbei am Loreley-Felsen mit kubischen Bezier-Kurven zeichnet. Beachten Sie:

- Der Kurs verbindet die beiden auf der Karte rot markierten Punkte.
- Der Kurs verläuft innerhalb des Flusses.
- Der Kurs ist stetig differenzierbar.

Wählen Sie dazu geeignete Kontrollpunkte. Als Hilfe können Sie das eingezeichnete Gitter verwenden.



Zeichnen Sie die Kurve in die Karte ein. Auf der Webseite zur Vorlesung

`http://numod.ins.uni-bonn.de/teaching/ss15/alma/`

finden Sie ein Programmfragment `loreley.cpp` in C++, mit dem Sie die Karte einlesen und modifiziert wieder herausschreiben können, sowie die entsprechende Bilddatei und Hinweise zur Übersetzung und Ausführung des Programms.

Ankündigung: Die Fachschaft Mathematik feiert am 11.06 ihre Matheparty in der N8schicht. Der VVK findet am Mo. 8.06., Di. 9.06. und Mi. 10.06. vor der Mensa Poppelsdorf statt. Alle weiteren Infos auch auf `fsmath.uni-bonn.de`.