Institut für Numerische Simulation
Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

universitätbonn

Übungen zu Algorithmische Mathematik II (V1G6)

Sommersemester 2015

Prof. Dr. Martin Rumpf — Dr. Orestis Vantzos — Dipl.-Math. Behrend Heeren

Übungsblatt 2 — Abgabe: 17 Juni 2015

Aufgabe 1

Zu $f \in C^0([0,1])$ definiere

$$f_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) B_i^n(x)\,,$$

wobei B_i^n das i-te Bernsteinpolynom von Grad n bezeichnet. Zeigen Sie, dass gilt:

1. Für $f(x) = 1$ ist $f_n(x) = 1$.
2. Für $f(x) = x$ ist $f_n(x) = x$.
3. Für $f(x) = x(1-x)$ ist $f_n(x) = (1-\frac{1}{n})x(1-x)$.
4. $\sum_{i=0}^{n}(x-\frac{i}{n})^2 B_i^n(x) \leq \frac{1}{4n}$.

Hinweis: Zum Beweis von 4. verwenden Sie 1.,2.,3. und die Darstellung

$$t^2 = -t(1-t) + t.$$

Lösung

1.

$$f_n(x) = \sum_{i=0}^{n} 1 B_i^n(x) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (1-x)^{n-i} x^i = (1-x-x)^n = 1$$

2.

$$
\begin{aligned}
f_n(x) &= \sum_{i=0}^{n} \frac{i}{n} B_i^n(x) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (1-x)^{n-i} x^i = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n} (1-x)^{n-i} x^i \\
&= x \sum_{i=1}^{n} \binom{n-1}{i-1} (1-x)^{n-i} x^{i-1} = x \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} (1-x)^{n-1-j} x^j \\
&\overset{1.}{=} x
\end{aligned}
$$

3.

$$
\begin{aligned}
f_n(x) &= \sum_{i=0}^{n} \frac{i(n-i)}{n^2} \frac{n!}{i!(n-i)!} (1-x)^{n-i} x^i \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{n-1}{n} \frac{(n-2)!}{(i-1)!(n-i-1)!} (1-x)^{n-i-1} x^{i-1} (1-x) x \\
&= (1-x) x (1-\frac{1}{n}) \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-2}{j} (1-x)^{(n-2)-j} x^j \\
&\overset{1.}{=} (1-\frac{1}{n}) x (1-x)
\end{aligned}
$$

4.

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n} (x-\frac{i}{n})^2 B_i^n(x) &= \sum_{i=0}^{n} (x-\frac{i}{n})^2 \binom{n}{i} (1-x)^{n-i} x^i \\
&\overset{1.}{=} x^2 - 2x \underbrace{\sum_{i=0}^{n} \frac{i}{n} B_i^n(x)}_{=f_n(x) \text{ zu } f(x)=x} + \underbrace{\sum_{i=0}^{n} \frac{i^2}{n^2} B_i^n(x)}_{=f_n(x) \text{ zu } f(x)=x^2=-x(1-x)+x} \\
&= x^2 - 2x^2 - x - (1-\frac{1}{n}) x (1-x) = x(1-x)(1-(1-\frac{1}{n})) \\
&= \frac{x(1-x)}{n} \\
&\leq \frac{1}{4n} \qquad \text{denn } x(1-x) \leq \frac{1}{4}, \text{ da } x \in [0,1].
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2 (Approximationssatz von Weierstraß)

Zeigen Sie, dass jede auf $[0,1]$ stetige Funktion f gleichmäßig durch Polynome approximiert werden kann.

Hinweis: Es sei f beschränkt und gleichmäßig stetig, d.h.

$$\forall \epsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x, y : \; |x-y| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Betrachten Sie nun für festes x die Indexmengen

$$R_n^\delta := \left\{ i \;\middle|\; 0 \le i \le n, \;\; \left| x - \frac{i}{n} \right| < \delta \right\}, \quad Q_n^\delta := \left\{ i \;\middle|\; 0 \le i \le n, \;\; \left| x - \frac{i}{n} \right| \ge \delta \right\}$$

und verwenden Sie Aufgabe 1.

Lösung

Mit $f_n(x)$ aus Aufgabe 1 gilt:

$$\begin{aligned}
|f(x) - f_n(x)| &\overset{1,1.}{\le} \sum_{i=0}^{n} \left| f(x) - f(\frac{i}{n}) \right| B_i^n(x) \\
&\le \sum_{i \in R_n^\delta} \frac{\epsilon}{2} B_i^n(x) + \sum_{i \in Q_n^\delta} \underbrace{\left| f(x) - f(\frac{i}{n}) \right|}_{\le 2C, \text{da f beschr. ist } |f| \le C} B_i^n(x) \\
&\le \frac{\epsilon}{2} \sum_{i=0}^{n} B_i^n(x) + \sum_{i \in Q_n^\delta} 2C B_i^n(x) \\
&\le \frac{\epsilon}{2} + \sum_{i \in Q_n^\delta} \underbrace{2C}_{\le 2C \frac{(x - \frac{i}{n})^2}{\delta^2}} B_i^n(x) \\
&\overset{1,4.}{\le} \frac{\epsilon}{2} + \underbrace{\frac{2C}{\delta^2} \frac{1}{4n}}_{\le \frac{\epsilon}{2} \text{ für n groß genug}} \le \epsilon
\end{aligned}$$

Wähle zuerst $\epsilon > 0$ klein, dann n groß.

Aufgabe 3

Beweisen Sie die Ableitungsformel (Satz 1.7. aus der Vorlesung)

$$\frac{d}{d\lambda} B_i^n(\lambda) = n \left(B_{i-1}^{n-1}(\lambda) - B_i^{n-1}(\lambda) \right) ,$$

mit Hilfe der rekursiven Darstellung der Bernsteinpolynome.

Lösung

- $\boxed{n=0}$: $B_i^0(\lambda) = \begin{cases} 1, & i = 0 \\ 0, & i \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{d}{d\lambda} B_i^0 = 0$

- Induktionsschritt $\boxed{n \to n+1}$:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{d\lambda} B_i^{n+1}(\lambda) = \frac{d}{d\lambda} \left\{ \lambda B_{i-1}^n(\lambda) + (1-\lambda) B_i^n(\lambda) \right\} \\
&= B_{i-1}^n(\lambda) + \lambda n \left(B_{i-2}^{n-1}(\lambda) - B_{i-1}^{n-1}(\lambda) \right) - B_i^n(\lambda) + (1-\lambda) n \left(B_{i-1}^{n-1}(\lambda) - B_i^{n-1}(\lambda) \right) \\
&= B_{i-1}^n(\lambda) - B_i^n(\lambda) \\
&\qquad + n \underbrace{\left(\lambda B_{i-2}^{n-1}(\lambda) + (1-\lambda) B_{i-1}^{n-1}(\lambda) \right)}_{B_{i-1}^n(\lambda)} - n \underbrace{\left(\lambda B_{i-1}^{n-1}(\lambda) + (1-\lambda) B_i^{n-1}(\lambda) \right)}_{B_i^n(\lambda)} \\
&\qquad\qquad = (n+1) \left(B_{i-1}^n(\lambda) - B_i^n(\lambda) \right)
\end{aligned}$$

Aufgabe 4

Zeigen Sie: Gibt man im Kontext kubischer Splines neben den Interpolationsbedingungen $s(t_i) = f(t_i)$ für $i = 0, \ldots, l+1$ auch *Randbedingungen*

(i) $s'(a) = f'(a)$, $s'(b) = f'(b)$ (eingespannte Splines) oder

(ii) $s''(a) = s''(b) = 0$ (natürliche Randbedingung) oder

(iii) $s'(a) = s'(b)$, $s''(a) = s''(b)$ (z.B. zusammen mit $s(a) = s(b)$ für periodische Funktionen f)

vor, so existiert eine eindeutige Splineinterpolation $s \in S_{4,\Delta}$.

Hinweis: Benutzen Sie die Optimalität der kubischen Splines.

Lösung

(i), (ii), (iii) involvieren lineare Funktionale in s ($s \to s'$, $s \to s''$) und je zwei Randbedingungen (RB). D.h. zu zeigen ist, dass die lineare Abbildung

$$S_{4,\Delta} \to \begin{pmatrix} (s(t_i))_{i=0,\ldots,l+1} \\ \text{RB} \end{pmatrix}$$

bijektiv ist. Wegen der Dimensionsgleichkeit ist nur die Injektivität zu zeigen.

Nehmen wir also an $f \equiv 0$. Zu zeigen: $s \equiv 0$:
Offensichtlich genügt $c \equiv 0$ allen Bedingungen ($c(t_i) = f(t_i)$ & RB).
Aus (i) oder (ii) oder (iii) folgt

$$\ddot{s} \cdot (\dot{c} - \dot{s})\big|_a^b = -\ddot{s} \cdot \dot{s}\big|_a^b = 0$$

und dann unter Verwendung von 1.13

$$\int_a^b \|\ddot{s}(s)\|^2 \mathrm{d}t \leq \int_a^b \|\ddot{c}(s)\|^2 \mathrm{d}t = 0.$$

Hieraus folgt schließlich

$$\ddot{s} \equiv 0$$

und wegen $s \in C^2$ und den Interpolationsbedingungen $s(t_i) = 0$ die Schlussfolgerung $s \equiv 0$.