Institut für Numerische Simulation
Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

universitätbonn

Übungen zu Algorithmische Mathematik II (V1G6)

Sommersemester 2015

Prof. Dr. Martin Rumpf — Dr. Orestis Vantzos — Dipl.-Math. Behrend Heeren

Übungsblatt 3 — Abgabe: 24 Juni 2015

Aufgabe 1 (Neville-Aitken Schema) — 4 Punkte

Gegeben seien die Stützstellen $t_0 = t_1 = 0$ und $t_2 = t_3 = 1$.

(a) Berechnen Sie für eine Funktion $f \in C^1([0,1])$ die Gewichte $D_{t_0 \ldots t_j} f$ für $j = 0, \ldots, 3$ des kubischen Hermit - Interpolationspolynoms $P_{t_0t_1t_2t_3} f$ mit Hilfe des Neville-Aitken-Schemas.

(b) Berechnen Sie für $f(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi}$ das Polynom $P_{t_0t_1t_2t_3} f$ explizit.

Lösung

$D_{t_0} f = f(t_0)$			
	$D_{t_0t_1} f = \frac{1}{1!} f^{(1)}(t_0)$		
$D_{t_1} f = f(t_2)$		$D_{t_0t_1t_2} f = \frac{D_{t_1t_2}f - D_{t_0t_1}f}{t_2 - t_0}$	
	$D_{t_1t_2} f = \frac{D_{t_2}f - D_{t_1}f}{t_2 - t_1} = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$		$D_{t_0t_1t_2t_3} f = \frac{D_{t_1t_2t_3}f - D_{t_0t_1t_2}f}{t_3 - t_0}$
$D_{t_2} f = f(t_3)$		$D_{t_1t_2t_3} f = \frac{D_{t_2t_3}f - D_{t_1t_2}f}{t_3 - t_1}$	
	$D_{t_2t_3} f = \frac{1}{1!} f^{(1)}(t_2)$		
$D_{t_3} f = f(t_4)$			

also

$$D_{t_0t_1t_2} f = \frac{D_{t_1t_2}f - D_{t_0t_1}f}{t_2 - t_0} = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1} - \frac{1}{1!} f^{(1)}(t_0) = f(1) - f(0) - f^{(1)}(0)$$

$$D_{t_1t_2t_3} f = \frac{D_{t_2t_3}f - D_{t_1t_2}f}{t_3 - t_1} = \frac{1}{1!} f^{(1)}(t_2) - \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1} = f^{(1)}(1) - f(1) + f(0)$$

$$D_{t_0t_1t_2t_3} f = \frac{D_{t_1t_2t_3}f - D_{t_0t_1t_2}f}{t_3 - t_0} = f^{(1)}(1) + f^{(1)}(0) - 2(f(1) - f(0))$$

Mit $f(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi}$ gilt $f(0) = f(1) = 0$, $f'(0) = 1$ und $f'(1) = -1$. Also

$$\begin{aligned} P_{t_0t_1t_2t_3}f &= D_{t_0}f + D_{t_0t_1}f(t-t_0) + D_{t_0t_1t_2}f(t-t_0)(t-t_1) + D_{t_0t_1t_2T_3}f(t-t_0)(t-t_1)(t-t_2) \\ &= 0 + 1\cdot(t-0) - 1\cdot(t-0)^2 + 0\cdot(t-0)^2(t-1) = t - t^2 \end{aligned}$$

Aufgabe 2 (Lagrange Interpolation) **4 Punkte**

Für $a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$ mit $h = \max_i |t_{i+1} - t_i|$ und $f \in C^2([a,b])$ betrachten wir den stückweise affinen Interpolationsoperator $\mathcal{I}_h$. Das bedeutet $(\mathcal{I}_h f)(t_i) = f(t_i)$ und $(\mathcal{I}_h f)\big|_{[t_{i-1},t_i]}$ ist affin linear für alle i. Zeigen Sie

$$\max_{t\in[a,b]} |f(t) - (\mathcal{I}_h f)(t)| \le C\,h^2 .$$

Hinweis: Verwenden Sie die Taylorentwicklung und den Mittelwertsatz.

Lösung

Wir zeigen $\max_{t\in[t_i,t_{i+1}]} |f(t) - (\mathcal{I}_h f)(t)| \le C\,h^2$ für ein $i \in \{0,\dots,n-1\}$. Es gilt

$$(\mathcal{I}_h f)(t) = f(t_i) + (t-t_i)\,\frac{f(t_{i+1}) - f(t_i)}{t_{i+1} - t_i}, \quad t \in [t_i, t_{i+1}] .$$

Die Taylorentwicklung erster Ordnung von f um den Punkt t_i ist gegeben durch $f(t) = f(t_i) + f'(\eta)(t - t_i)$ für ein $\eta \in [t_i, t_{i+1}]$. Der Mittelwertsatz besagt, es gibt ein $\xi \in [t_i, t_{i+1}]$, so dass

$$f'(\xi) = \frac{f(t_{i+1}) - f(t_i)}{t_{i+1} - t_i} .$$

Wiederholte Anwendung des Mittelwertsatzes ergibt, es gibt ein $\vartheta \in [t_i, t_{i+1}]$ mit

$$\begin{aligned} f(t) - (\mathcal{I}_h f)(t) &= f(t_i) + f'(\eta)(t-t_i) - f(t_i) - (t-t_i)\,\frac{f(t_{i+1}) - f(t_i)}{t_{i+1} - t_i} \\ &= f'(\eta)(t-t_i) - f'(\xi)(t-t_i) = (f'(\eta) - f'(\xi))\cdot(t-t_i) \\ &= f''(\vartheta)\cdot(\eta - \xi)\cdot(t-t_i) \end{aligned}$$

Da $f \in C^2([a,b])$ gilt $|f''(\vartheta)| \le C$, ferner gilt $|\eta - \xi| \le h$ und $|t - t_i| \le h$, also

$$\max_{t\in[t_i,t_{i+1}]} |f(t) - (\mathcal{I}_h f)(t)| \le C\,h^2 .$$

Aufgabe 3 (Kubischer B-Spline) **4 Punkte**

Betrachten Sie die Knotenmenge $t_0 = 0 < \ldots < t_4 = 1$ mit $t_i = i/4$ für $i = 0, \ldots, 4$ und berechnen Sie den kubischen B-Spline $N_{0,4}(t)$ durch die rekursive Formel in Definition 1.21 explizit.

Lösung

$$
\begin{aligned}
N_{0,1} &= \chi_{[0,\frac{1}{4})}(t)\,, \quad N_{1,1} = \chi_{[\frac{1}{4},\frac{1}{2})}(t)\,, \quad N_{2,1} = \chi_{[\frac{1}{2},\frac{3}{4})}(t)\,, \quad N_{3,1} = \chi_{[\frac{3}{4},1)}(t) \\
N_{0,2} &= \frac{t-t_0}{t_1-t_0}N_{0,1}(t) + \frac{t-t_2}{t_1-t_2}N_{1,1}(t) = \begin{cases} 4t, & t \in [0,\frac{1}{4}) \\ 2-4\,t, & t \in [\frac{1}{4},\frac{1}{2}) \end{cases} \\
N_{1,2} &= \frac{t-t_1}{t_2-t_1}N_{1,1}(t) + \frac{t-t_3}{t_2-t_3}N_{2,1}(t) = \begin{cases} 4t-1, & t \in [\frac{1}{4},\frac{1}{2}) \\ 3-4\,t, & t \in [\frac{1}{2},\frac{3}{4}) \end{cases} \\
N_{2,2} &= \frac{t-t_2}{t_3-t_2}N_{2,1}(t) + \frac{t-t_4}{t_3-t_4}N_{3,1}(t) = \begin{cases} 4t-2, & t \in [\frac{1}{2},\frac{3}{4}) \\ 4-4\,t, & t \in [\frac{3}{4},1) \end{cases} \\
N_{0,3} &= \frac{t-t_0}{t_2-t_0}N_{0,2}(t) + \frac{t-t_3}{t_1-t_3}N_{1,2}(t) = 2t\,N_{0,2}(t) + \tfrac{1}{2}(3-4t)N_{1,2}(t) \\
&= \begin{cases} 8t^2, & t \in [0,\frac{1}{4}) \\ -16t^2+12t-\frac{3}{2}, & t \in [\frac{1}{4},\frac{1}{2}) \\ \frac{1}{2}(3-4t)^2, & t \in [\frac{1}{2},\frac{3}{4}) \end{cases} \\
N_{1,3} &= \frac{t-t_1}{t_3-t_1}N_{1,2}(t) + \frac{t-t_4}{t_2-t_4}N_{2,2}(t) = \tfrac{1}{2}(4t-1)\,N_{1,2}(t) + 2(1-t)N_{2,2}(t) \\
&= \begin{cases} \frac{1}{2}(4t-1)^2, & t \in [\frac{1}{4},\frac{1}{2}) \\ -16t^2+20t-\frac{11}{2}, & t \in [\frac{1}{2},\frac{3}{4}) \\ 8(1-t)^2, & t \in [\frac{3}{4},1) \end{cases} \\
N_{0,4} &= \frac{t-t_0}{t_3-t_0}N_{0,3}(t) + \frac{t-t_4}{t_1-t_4}N_{1,3}(t) = \tfrac{4}{3}t\,N_{0,3}(t) + \tfrac{4}{3}(1-t)N_{1,3}(t) \\
&= \begin{cases} \frac{1}{2}(4t-1)^2, & t \in [0,\frac{1}{4}) \\ -32t^3+32t^2-8t+\frac{2}{3}, & t \in [\frac{1}{4},\frac{1}{2}) \\ 32t^3-64t^2+40t-\frac{22}{3}, & t \in [\frac{1}{2},\frac{3}{4}) \\ \frac{32}{3}(1-t)^3, & t \in [\frac{3}{4},1) \end{cases}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 4 (Interpolationsfehler) **4 Punkte**

Seien $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ gegeben und $f \in C^{n+1}([a,b])$. Definiere das n-dimensionale Simplex $\sum^n \subset \mathbb{R}^n$ durch

$$\sum^n = \left\{ s \in \mathbb{R}^n \,:\, \sum_{i=1}^n s_i \leq 1\,, \quad s_i \geq 0 \right\}$$

und setze $s_0 := 1 - \sum_{i=1}^n s_i$.

(a) Zeigen Sie zunächst per Induktion über n die Identität

$$D_{t_0,\ldots,t_n} f = \int_{\sum^n} f^{(n)} \Big(\sum_{i=0}^n s_i t_i \Big)\, ds_1\, \ldots ds_n\,.$$

(b) Folgern Sie dann: es gibt ein $\tau \in [a,b]$ mit $D_{t_0,\ldots,t_n} f = \frac{1}{n!} f^{(n)}(\tau)$.

Hinweis: Benutzen Sie die Formel $\int_{\sum^n} ds_1\, \ldots ds_n = \frac{1}{n!}$ (ohne Beweis).

(c) Zeigen Sie mit Hilfe obiger Darstellung von $D_{t_0,\ldots,t_n} f$ die Abschätzung

$$\max_{t\in[a,b]} |f(t) - (P_{t_0,\ldots,t_n} f)(t)| \;\leq\; C\, \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}\,.$$

Lösung

Induktionsanfang ($n = 0$): $f(s_0 t_0) = f(1 \cdot t_0) = D_{t_0} f$.
Induktionsschritt: Schreibe die rechte Seite der Gleichung (RS) wie folgt um:

$$\begin{aligned}
(RS) &= \int_{\{\sum_{i=1}^{n+1} s_i \leq 1,\, s_i \geq 0\}} f^{(n+1)} \Big(t_0 + \sum_{i=1}^{n+1} s_i (t_i - t_0) \Big)\, ds_1\, \ldots ds_{n+1} \\
&= \int_{\{\sum_{i=1}^{n} s_i \leq 1,\, s_i \geq 0\}} \Big[\int_0^{1-\sum_{i=1}^n s_i} f^{(n+1)} \Big(t_0 + \sum_{i=1}^n s_i (t_i - t_0) + s_{n+1}(t_{n+1} - t_0) \Big)\, ds_{n+1} \Big] ds_1\, \ldots ds_n \\
&= \int_{\sum^n} \frac{1}{t_{n+1} - t_0} \Big[\int_0^{(t_{n+1}-t_0)\cdot(1-\sum_{i=1}^n s_i)} f^{(n+1)} \Big(t_0 + \sum_{i=1}^n s_i (t_i - t_0) + s_{n+1} \Big)\, ds^n \\
&= \frac{\int_{\sum^n} \Big[f^{(n)} \Big(t_0 + \sum_{i=0}^n s_i (t_i - t_0) + (t_{n+1} - t_0)(1 - \sum_{i=0}^n s_i) \Big) - f^{(n)} \Big(t_0 + \sum_{i=1}^n s_i (t_i - t_0) \Big) \Big] ds^n}{t_{n+1} - t_0} \\
&= \frac{\int_{\sum^n} f^{(n)} \Big(t_{n+1} + \sum_{i=1}^n s_i (t_i - t_{n+1}) \Big) ds^n - \int_{\sum^n} f^{(n)} \Big(t_0 + \sum_{i=1}^n s_i (t_i - t_0) \Big) ds^n}{t_{n+1} - t_0} \\
&= \frac{\int_{\sum^n} f^{(n)} \Big(\sum_{i=1}^{n+1} s_i t_i \Big) ds^n - \int_{\sum^n} f^{(n)} \Big(\sum_{i=0}^n s_i t_i \Big) ds^n}{t_{n+1} - t_0} \\
&= \frac{D_{t_1 \ldots t_{n+1}} f - D_{t_0 \ldots t_n} f}{t_{n+1} - t_0} \\
&= D_{t_0 \ldots t_{n+1}} f
\end{aligned}$$

Hierbei wurde die Notation $ds^n := ds_1 \ldots ds_n$ und folgende Aussagen benutzt:

1. $\sum_{i=0}^{n+1} s_i t_i = (1 - \sum_{i=1}^{n+1} s_i) t_0 + \sum_{i=1}^{n+1} s_i t_i = t_0 + \sum_{i=1}^{n+1} s_i (t_i - t_0)$
2. Fubini
3. Substitutionsregel angewandt auf $s_{n+1} \mapsto (t_{n+1} - t_0) s_{n+1}$
4. Hauptsatz der Diff. und Integralrechnung
5. $t_0 + \sum_{i=0}^{n} s_i (t_i - t_0) + (t_{n+1} - t_0)(1 - \sum_{i=0}^{n} s_i) = t_{n+1} + \sum_{i=1}^{n} s_i (t_i - t_{n+1})$
6. Umformungen ähnlich zu (1.)
7. Induktionsvoraussetzung
8. Satz 1.18

Dann gilt mit dem Mittelwertsatz der Integralrechnung: es gibt ein $\tau \in [a, b]$ mit

$$D_{t_0,\dots,t_n} f = \int_{\Sigma^n} f^{(n)} \Big(\sum_{i=0}^{n} s_i t_i \Big) \, ds^n = f^{(n)}(\tau) \cdot \int_{\Sigma^n} ds_1 \, \dots ds_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(\tau)$$

Nun folgt mit Satz 1.18 und Teil (b)

$$f(t) - (P_{t_0,\dots,t_n} f)(t) = D_{t_0,\dots,t_n,t} f \cdot w_{n+1}(t) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\tau) \cdot w_{n+1}(t)$$

und somit

$$\max_{t \in [a,b]} |f(t) - (P_{t_0,\dots,t_n} f)(t)| \leq \frac{\max_{\tau \in [a,b]} |f^{(n+1)}(\tau)|}{(n+1)!} \cdot \max_{t \in [a,b]} |w_{n+1}(t)| \leq C \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$