Institut für Numerische Simulation
Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

universität bonn

Übungen zu Algorithmische Mathematik II (V1G6)

Sommersemester 2015

Prof. Dr. Martin Rumpf — Dr. Orestis Vantzos — Dipl.-Math. Behrend Heeren

Übungsblatt 5 — Abgabe: 8. Juli 2015

Aufgabe 1 — 4 Punkte

Für $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ sei $|||\mathbf{A}|||_2$ die durch die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^n$ definierte Operatornorm auf $\mathbb{R}^{n,n}$, und $||\mathbf{A}||_F := \left(\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ die Frobenius-Norm. Zeigen Sie:

(i) $|||\mathbf{A}|||_2 = \sqrt{\rho(\mathbf{A}^T\mathbf{A})}$, wobei $\rho(\mathbf{B}) := \max_i |\lambda_i|$ für λ_i Eigenwerte von $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n,n}$.

Hinweis: Benutzen Sie die Polarzerlegung $\mathbf{A} = \mathbf{RU}$, wobei $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{n,n}$ orthogonal und $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{n,n}$ symmetrisch ist.

(ii) $|||\mathbf{A}|||_2 \leq ||\mathbf{A}||_F \leq \sqrt{n}|||\mathbf{A}|||_2$.

Lösung

(i) Sei $\{v_i\}_{1\leq i\leq n}$ eine (normalisierte, $\|v_i\|_2 = 1$) Eigenbasis der symmetrischen Matrix $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$, mit entsprechenden Eigenwerten $\sigma_i \geq 0$ (die Singulärwerte von A). Für einen Vektor $x = \sum_{i=1}^n x_i v_i$ mit $\|x\|_2 = 1$, gilt

$$\begin{aligned}
|||\mathbf{A}|||_2 &= \sup_{\|x\|_2=1} \|\mathbf{A}x\|_2 = \sup_{\|x\|_2=1} \sqrt{(\mathbf{A}x)^T\mathbf{A}x} = \sup_{\|x\|_2=1} \sqrt{x^T(\mathbf{A}^T\mathbf{A}x)} \\
&= \sup_{\|x\|_2=1} \sqrt{x^T \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{A}^T\mathbf{A}v_i} = \sup_{\|x\|_2=1} \sqrt{x^T \sum_{i=1}^n x_i\sigma_i v_i} \\
&= \sup_{\|x\|_2=1} \sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_i (x^T(x_i v_i))} \leq \sup_{\|x\|_2=1} \max_i \sqrt{|\sigma_i|}\sqrt{\sum_{i=1}^n (x^T(x_i v_i))} \\
&= \sup_{\|x\|_2=1} \sqrt{\rho(\mathbf{A}^T\mathbf{A})}\|x\|_2 = \sqrt{\rho(\mathbf{A}^T\mathbf{A})}
\end{aligned}$$

also $|||\mathbf{A}|||_2 \leq \sqrt{\rho(\mathbf{A}^T\mathbf{A})}$. Nun sei v_m ein Eigenvektor zum maximalen Eigenwert σ_m of $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$:

$$|||\mathbf{A}|||_2 = \sup_{\|x\|_2=1} \|\mathbf{A}x\|_2$$
$$\geq \|\mathbf{A}v_m\|_2 = \sqrt{v_m\mathbf{A}^T\mathbf{A}v_m} = \sqrt{\sigma_m}\|v_m\|_2 = \sqrt{\rho(\mathbf{A}^T\mathbf{A})}$$

also $|||\mathbf{A}|||_2 = \sqrt{\rho(\mathbf{A}^T\mathbf{A})}$.

(ii) Mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung erhalten wir:

$$|||\mathbf{A}|||_2 = \sup_{\|x\|_2=1} \|\mathbf{A}x\|_2 = \sup_{\|x\|_2=1} \Big(\sum_{i=1}^n \big(\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \big)^2 \Big)^{\frac{1}{2}}$$
$$\leq \sup_{\|x\|_2=1} \Big(\sum_{i=1}^n \big(\sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \big) \underbrace{\|x\|^2}_{=1} \Big)^{\frac{1}{2}} = ||||\mathbf{A}|||_{\mathbf{F}}$$
$$|||\mathbf{A}|||_2^2 \geq \|\mathbf{A}e_k\|_2^2 = \sum_{i=1}^n |a_{ik}|^2 \Rightarrow n|||\mathbf{A}|||_2^2 = \sum_{k=1}^n |||\mathbf{A}|||_2^2 \geq \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n |a_{ik}|^2 = ||||\mathbf{A}|||_{\mathbf{F}}^{\mathbf{2}}$$

Aufgabe 2 **4 Punkte**

Zeigen Sie $|||\mathbf{A}|||_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$ für $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$.

Lösung

$$|||\mathbf{A}|||_\infty = \sup_{\|x\|_\infty=1} \|\mathbf{A}x\|_\infty = \sup_{\|x\|_\infty=1} \max_{1\leq i\leq n} |\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j| \leq \sup_{\|x\|_\infty=1} \max_{1\leq j\leq n} |x_j| \max_{1\leq i\leq n} |\sum_{j=1}^n a_{ij}|$$
$$= \sup_{\|x\|_\infty=1} \|x\|_\infty \max_{1\leq i\leq n} |\sum_{j=1}^n a_{ij}| = \max_{1\leq i\leq n} |\sum_{j=1}^n a_{ij}| \leq \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

Wähle $1 \leq m \leq n$ so, dass $\sum_{j=1}^n |a_{mj}| = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$ und sei $y \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor mit $y_j = -1$ falls $a_{mj} < 0$ und 1 sonst. Dann gilt $\|y\|_\infty = 1$ und

$$|||\mathbf{A}|||_\infty = \sup_{\|x\|_\infty=1} \|\mathbf{A}x\|_\infty \geq \|\mathbf{A}y\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |\sum_{j=1}^n a_{ij}y_j|$$
$$\geq |\sum_{j=1}^n a_{mj}y_j| = |\sum_{j=1}^n |a_{mj}|| = \sum_{j=1}^n |a_{mj}| = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|,$$

also $|||\mathbf{A}|||_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$.

Aufgabe 3 **4 Punkte**

Sei $f \in C([0,1])$. Betrachten Sie die Gleichung

$$-u''(x) = f(x), \quad x \in [0,1],$$

mit Randdaten $u(0) = u_0$ und $u(1) = u_1$.

(a) Geben Sie eine explizite Lösung der Gleichung an. Verfahren Sie dabei wie folgt: Berechnen Sie eine Funktion $\tilde{u}$ durch zweimaliges Aufintegrieren von f und berechnen Sie u als eine affin-lineare Korrektur von $\tilde{u}$.

(b) Sei $u \in C^2([0,1])$ eine Lösung der Gleichung für konstantes f. Für $N \in \mathbb{N}$ betrachten wir die uniforme Diskretisierung $x_i = ih$ für $i = 0, \ldots, N$ und $h = N^{-1}$. Sei u_h die Gitterfunktion der diskreten Lösung, d.h. $-\partial_h^- \partial_h^+ u_h = f$, $u_h(0) = u_0$, $u_h(1) = u_1$. Zeigen Sie, dass $u_h(x_i) = u(x_i)$ gilt.

Lösung

(a)

$$\begin{aligned}
\tilde{u}(x) &= -\int_0^x \int_0^s f(r)dr\,ds \\
u(x) &= \tilde{u}(x) + u_0 - \tilde{u}(0) + \Big((u_1 - \tilde{u}(1)) - (u_0 - \tilde{u}(0)) \Big) x
\end{aligned}$$

(b) $\tilde{u}(x) = -\int_0^x \int_0^s f dr\,ds = -\int_0^x sf\,ds = -\frac{1}{2} f x^2 \Rightarrow$

$$u(x) = u_0 + \left(\frac{f}{2} + u_1 - u_0 \right) x - \frac{f}{2} x^2$$

Dann folgt

$$\begin{aligned}
-\partial_h^- \partial_h^+ u|_{x=x_i} &= -\frac{1}{h^2} \{ u(x_{i-1}) - 2u(x_i) + u(x_{i+1}) \} \\
&= -\frac{1}{h^2} \Bigg\{ \underbrace{(u_0 - 2u_0 + u_0)}_{=0} + \left(\frac{f}{2} + u_1 - u_0 \right) (x_{i-1} - 2x_i + x_{i+1}) \\
&\qquad\qquad - \frac{f}{2} (x_{i-1}^2 - 2x_i^2 + x_{i+1}^2) \Bigg\} \\
&= -\frac{1}{h^2} \Bigg\{ \left(\frac{f}{2} + u_1 - u_0 \right) \underbrace{((i-1)h - 2ih + (i+1)h)}_{=0} \\
&\qquad\qquad - \frac{f}{2} \underbrace{\Big((i-1)^2 h^2 - 2i^2 h^2 + (i+1)^2 h^2 \Big)}_{=2h^2} \Bigg\} \\
&= f
\end{aligned}$$

und $u(0) = u_h(0)$, $u(1) = u_h(1)$. Aus der Eindeutigkeit der diskreten Lösung folgt $u(x_i) = u_h(x_i)$.

Aufgabe 4 **4 Punkte**

(i) Zeigen Sie, dass im $\mathbb{R}^2$ der Laplace-Operator Δ in Polarkoordinaten (r, ϕ), welche durch

$$(x, y) = \Phi(r, \phi) = (r\cos(\phi), r\sin(\phi))$$

definiert sind, wie folgt geschrieben werden kann:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}\,.$$

Hinweis: Es gilt $(D\Phi)^{-1} = D\Phi^{-1} \circ \Phi$.

(ii) Weisen Sie mit Hilfe von (i) nach, dass die Funktion $u(r, \phi) := r^{\frac{2}{3}} \sin(\frac{2}{3}\phi)$ im Gebiet $G := (-1, 1) \times (-1, 1) \setminus ([0, 1] \times [-1, 0])$ die Gleichung

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } G,$$

erfüllt, aber im Nullpunkt $(0, 0)$ nicht differenzierbar ist.

Lösung

(i)

$$\frac{\partial}{\partial x}u(r,\phi) = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \phi}\frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial y}u(r,\phi) = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \phi}\frac{\partial \phi}{\partial y}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} & \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{pmatrix} = D\Phi^{-1} = (D\Phi)^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -r\sin\phi \\ \sin\phi & r\cos\phi \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ \frac{-\sin\phi}{r} & \frac{\cos\phi}{r} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} &= (-\sin\phi)\frac{\partial \phi}{\partial x} = (-\sin\phi)\frac{-\sin\phi}{r} = \frac{\sin^2\phi}{r} \\
\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} &= \frac{-\cos\phi\frac{\partial\phi}{\partial x}r + \sin\phi\frac{\partial r}{\partial x}}{r^2} = \frac{\cos\phi\sin\phi + \sin\phi\cos\phi}{r^2} = 2\frac{\cos\phi\sin\phi}{r^2} \\
\frac{\partial^2 r}{\partial y^2} &= (\cos\phi)\frac{\partial \phi}{\partial y} = (\cos\phi)\frac{\cos\phi}{r} = \frac{\cos^2\phi}{r} \\
\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} &= \frac{-\sin\phi\frac{\partial\phi}{\partial y}r - \cos\phi\frac{\partial r}{\partial y}}{r^2} = \frac{-\sin\phi\cos\phi - \cos\phi\sin\phi}{r^2} = -2\frac{\cos\phi\sin\phi}{r^2}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(r,\phi) =&\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial\phi\partial r}\frac{\partial\phi}{\partial x}\Big)\cdot\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}+\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2}\frac{\partial\phi}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\phi}\frac{\partial r}{\partial x}\Big)\cdot\frac{\partial\phi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial\phi}\cdot\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\\
=&\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\cos\phi-\frac{\partial^2 u}{\partial\phi\partial r}\frac{\sin\phi}{r}\Big)\cdot\cos\phi+\frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{\sin^2\phi}{r}\\
&+\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2}\frac{-\sin\phi}{r}+\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\phi}\cos\phi\Big)\cdot\frac{-\sin\phi}{r}+\frac{\partial u}{\partial\phi}\cdot 2\frac{\cos\phi\sin\phi}{r^2}\\
=&\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\cos^2\phi+\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2}\frac{\sin^2\phi}{r^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial\phi\partial r}\frac{\sin\phi\cos\phi}{r}+\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\sin^2\phi}{r}+2\frac{\partial u}{\partial\phi}\cdot\frac{\cos\phi\sin\phi}{r^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial y^2}u(r,\phi) =&\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial\phi\partial r}\frac{\partial\phi}{\partial y}\Big)\cdot\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}+\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2}\frac{\partial\phi}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\phi}\frac{\partial r}{\partial y}\Big)\cdot\frac{\partial\phi}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial\phi}\cdot\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\\
=&\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\sin\phi+\frac{\partial^2 u}{\partial\phi\partial r}\frac{\cos\phi}{r}\Big)\cdot\sin\phi+\frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{\cos^2\phi}{r}\\
&+\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2}\frac{\cos\phi}{r}+\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\phi}\sin\phi\Big)\cdot\frac{\cos\phi}{r}-2\frac{\partial u}{\partial\phi}\frac{\cos\phi\sin\phi}{r^2}\\
=&\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\sin^2\phi+\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2}\frac{\cos^2\phi}{r^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial\phi\partial r}\frac{\cos\phi\sin\phi}{r}+\frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{\cos^2\phi}{r}-2\frac{\partial u}{\partial\phi}\frac{\cos\phi\sin\phi}{r^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Delta u(r,\phi) &= \Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Big)u(r,\phi)\\
&= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}(\cos^2\phi+\sin^2\phi)+\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2}\frac{\sin^2\phi+\cos^2\phi}{r^2}+0+\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\sin^2\phi+\cos^2\phi}{r}+0\\
&= \Big(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Big)u(r,\phi)
\end{aligned}
$$

(ii)

$$
\frac{\partial}{\partial r}u(r,\phi) = \frac{2}{3}r^{-\frac{1}{3}}\sin(\frac{2}{3}\phi)\,,\quad \frac{\partial^2}{\partial r^2}u(r,\phi) = -\frac{2}{9}r^{-\frac{4}{3}}\sin(\frac{2}{3}\phi)
$$
$$
\frac{\partial}{\partial \phi}u(r,\phi) = \frac{2}{3}r^{\frac{2}{3}}\cos(\frac{2}{3}\phi)\quad \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}u(r,\phi) = -\frac{4}{9}r^{\frac{2}{3}}\sin(\frac{2}{3}\phi)
$$

$$
\Rightarrow \underbrace{\Big(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Big)}_{=\Delta \text{ nach (i)}}u = -\frac{2}{9}r^{-\frac{4}{3}}\sin(\frac{2}{3}\phi)-\frac{4}{9}r^{-\frac{4}{3}}\sin(\frac{2}{3}\phi)+\frac{2}{3}r^{-\frac{4}{3}}\sin(\frac{2}{3}\phi) = 0
$$

Betrachte $u(r,\phi)$ auf der Geraden mit $\phi = \frac{3}{4}\pi$, also die Funktion

$$
\tilde{u}(r) = u(r,\frac{3}{4}\pi) = r^{\frac{2}{3}}\sin(\frac{\pi}{2}) = \sqrt[3]{r^2}\,,
$$

welche in $r = 0$ nicht differenzierbar ist.