Institut für Numerische Simulation
Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

universitätbonn

Übungen zu Algorithmische Mathematik II (V1G6)

Sommersemester 2015

Prof. Dr. Martin Rumpf — Dr. Orestis Vantzos — Dipl.-Math. Behrend Heeren

Übungsblatt 6 — Abgabe: 15. Juli 2015

Aufgabe 1 (Operatornorm) — 10 Punkte

Zeigen Sie: $|||\mathbf{AB}||| \leq |||\mathbf{A}|||\,|||\mathbf{B}|||$ für $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n,n}$ und $|||.|||$ Operatornorm.

Lösung

$$
\begin{aligned}
|||\mathbf{AB}||| &= \sup_{\|x\|=1} \|\mathbf{AB}x\| = \sup_{\|x\|=1} \|\mathbf{B}x\| \cdot \|\mathbf{A}\frac{\mathbf{B}x}{\|\mathbf{B}x\|}\| \leq \sup_{\|x\|=1} \|\mathbf{B}x\| \cdot \sup_{\|x\|=1} \|\mathbf{A}\frac{\mathbf{B}x}{\|\mathbf{B}x\|}\| \\
&= |||\mathbf{B}||| \cdot \sup_{\|y\|=1,\, y\in \mathrm{im}(\mathbf{B})} \|\mathbf{A}y\| \leq |||\mathbf{B}||| \cdot \sup_{\|y\|=1} \|\mathbf{A}y\| = |||\mathbf{B}||| \cdot |||\mathbf{A}|||
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2 (Diskretes Maximumprinzip) — 10 Punkte

Sei $\Omega_h \subset \mathbb{R}^2$ ein Würfelgebiet mit Gitterweite h. Sei u_h die Gitterfunktion der diskreten Lösung des Poisson-Problems, d.h. es gilt $-\Delta_h u_h = 0$ in Ω_h und $u_h = g_h$ auf $\partial\Omega_h$. Zeigen Sie: u_h nimmt sein Maximum auf dem Rand an.

Hinweis: Zeigen Sie: Nimmt u_h das Maximum im Inneren an, so ist u_h konstant.

Lösung

Die Gitterdiskretisierung ist gegeben durch Knoten $x_{ij} = (ih, jh)$, sei u_{ij} der Wert von u_h am Knoten x_{ij}. Sei x_{kl} ein innerer Knoten (d.h. $0 < k, l < N$) an dem das Maximum angenommen wird.
Angenommen, u_h ist *nicht* konstant. Das bedeutet $u_{kl} \geq u_{ij}$ für alle $i \neq k$ und $j \neq l$ und es existieren $s, t \in \{-1, 1\}$ mit $u_{kl} > u_{(k+s)(l+t)}$. Da u_h die Gleichung $-\Delta_h u_h = 0$ im Inneren löst, folgt

$$
\begin{aligned}
0 &= 4u_{kl} - u_{(k-1)l} - u_{(k+1)l} - u_{k(l-1)} - u_{k(l+1)} \\
&> 4u_{kl} - u_{kl} - u_{kl} - u_{kl} - u_{kl} = 0\,,
\end{aligned}
$$

also ein Widerspruch.

Aufgabe 3 (Eigenwerte) **8+2 Punkte**

Betrachten Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 9 \end{pmatrix}$$

(a) Geben Sie mit Hilfe des Satzes von Gerschgorin eine möglichst genaue Angabe über die Lage der Eigenwerte.

(b) Können Sie folgern, dass die Matrix invertierbar ist?

Lösung

(a) Es gilt $I_1 = I_2 = I_3 = \{1, 2, 3\}$, $I_4 = I_5 = \{4, 5\}$, also

$$\cap_{j\in I_1} \partial B_{r_j}(a_{jj}) = \cap_{j\in I_2} \partial B_{r_j}(a_{jj}) = \cap_{j\in I_3} \partial B_{r_j}(a_{jj}) = 0$$
$$\cap_{j\in I_4} \partial B_{r_j}(a_{jj}) = \cap_{j\in I_5} \partial B_{r_j}(a_{jj}) = \{\, 8 + \sqrt{3}i\,,\; 8 - \sqrt{3}i\,\}$$

Nach Lemma 2.15 (ii) liegen die Eigenwerte von A in

$$\Big(B_2(2) \cup \{0\}\Big) \cup \Big(B_2(7) \cup B_2(9) \cup \{8 + \sqrt{3}i\,,\; 8 - \sqrt{3}i\}\Big)$$

(b) Nein, da 0 als Eigenwert nicht ausgeschlossen werden kann.

Aufgabe 4 (De-Casteljau-Algorithmus) **7+3 Punkte**

(a) Berechnen Sie für die Kontrollpunkte $P_0, \ldots, P_3$ die Auswertung des kubischen Bezierpolynoms an der Stelle $t = \frac{1}{3}$ mit Hilfe des de Casteljau-Algorithmus:

$$P_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_1 = \begin{pmatrix} 9 \\ 18 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 18 \\ 27 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 27 \\ 9 \end{pmatrix}$$

(b) Schreiben Sie den Pseudocode für ein Programm, das für vier gegebene Kontrollpunkte $P_0, \ldots, P_3 \in \mathbb{R}^2$ die Auswertung des kubischen Bezierpolynoms an der Stelle t mit Hilfe des de Casteljau-Algorithmus berechnet.

Lösung

(a) Setze $P_k^{(0)} = P_k$ für $k = 0, \ldots, 3$.

$$P_0^{(1)} = (1 - \frac{1}{3})P_0^{(0)} + \frac{1}{3}P_1^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$
$$P_1^{(1)} = (1 - \frac{1}{3})P_1^{(0)} + \frac{1}{3}P_2^{(0)} = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 21 \end{pmatrix}$$
$$P_2^{(1)} = (1 - \frac{1}{3})P_2^{(0)} + \frac{1}{3}P_3^{(0)} = \begin{pmatrix} 12 \\ 18 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ 21 \end{pmatrix}$$

$$P_0^{(2)} = (1-\frac{1}{3})P_0^{(1)} + \frac{1}{3}P_1^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 11 \end{pmatrix}$$
$$P_1^{(2)} = (1-\frac{1}{3})P_1^{(1)} + \frac{1}{3}P_2^{(1)} = \begin{pmatrix} 8 \\ 14 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 21 \end{pmatrix}$$

$$P_0^{(3)} = (1-\frac{1}{3})P_0^{(2)} + \frac{1}{3}P_1^{(2)} = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 6 \\ 11 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 15 \\ 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 14\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

(b)

```
// Berechne fuer vier 2D-Kontrollpunkte P0, P1, P2, P3 die Auswertung B
// der Bezierkurve an der Stelle t.
void deCasteljau ( double B[2], double P[4][2], double t ){
  // kopiere 4 Kontrollpunkte in double Werte,
  // die im Algorithmus sukzessive ueberschrieben werden
  double pp[4][2] = {{P[0][0],P[0][1]},{P[1][0],P[1][1]},{P[2][0],P[2][1]},{P[3][0],P[3][1]}};

  // de-Casteljau Algorithmus fuer quadratische Bezierkurven:
  // berechne die Auswertung B(t)
    for ( int j = 0;  j < 3; ++j )
      for ( int k = 0;  k < 3 - j; ++k )
        for ( int i = 0;  i < 2; ++i )
          pp[k][i] = (1 - t) * pp[k][i] + t * pp[k + 1][i];

  // schreibe B(t) in B
  for ( int i = 0;  i < 2; ++i )
    B[i] = pp[0][i];
}
```

Aufgabe 5 (Party) **3+3+4 Punkte**

Bei einer Party wird der Eintrittspreis gewürfelt. Der Gast zahlt die obenliegende Augenzahl in Euro als Eintrittspreis.

a) Zum Würfeln wird ein normaler Würfel verwendet. Beschreiben Sie dieses Modell durch einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum.

b) Nun haben Sie die Wahl mit einem normalen Würfel zu würfeln oder 3 Euro zu bezahlen. Berechnen Sie den zu erwartenden Eintrittspreis, falls Sie würfeln. Sind 3 Euro ein fairer Eintrittspreis?

c) Nun wird ein siebenseitiger Würfel verwendet auf dem die Augenzahlen aus der 1 und den ersten sechs Primzahlen bestehen. Beschreiben Sie dieses Modell ebenfalls durch einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum. Wie hoch ist, wenn Sie nun würfeln, der zu erwartende Eintrittspreis?

Aufgabe 6 (Bedingte Wahrscheinlichkeiten) **4 + 6 Punkte**

Wir betrachten einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, wobei Ω eine endliche Menge ist.

a) Es seien $A, B \in \mathcal{F}$ zwei Ereignisse. Definieren Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit von A gegeben B.

b) Beweisen, Sie die folgende Aussage: Seien $B_1, \ldots, B_N \in \mathcal{F}$, paarweise disjunkte Mengen, so dass (i) $\cup_{n=1}^N B_n = \Omega$, (ii) $\mathbb{P}(B_n) > 0$, für alle n.

   Dann gilt für alle $A \in \mathcal{F}$, dass $\sum_{n=1}^N \mathbb{P}(A|B_n)\mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(A)$.

Aufgabe 7 (Bedingte Wahrscheinlichkeiten) **2 + 2 + 4 Punkte**

Eine Markovkette werde durch folgende Übergangsmatrix beschrieben

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

a) Geben Sie den zur Markovkette gehörigen Graphen an.

b) Zeigen Sie, dass die Markovkette mehr als eine invariante Verteilung hat und bestimmen Sie alle invarianten Verteilungen.

c) Zeigen Sie, dass $\lim_{n\uparrow\infty} P^n$ existiert und bestimmen Sie die Grenzmatrix.