Institut für Numerische Simulation
Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

universitätbonn

Übungen zu Algorithmische Mathematik II (V1G6)

Sommersemester 2015

Prof. Dr. Martin Rumpf — Dr. Orestis Vantzos — Dipl.-Math. Behrend Heeren

Übungsblatt 3 — Abgabe: 24 Juni 2015

Aufgabe 1 (Neville-Aitken Schema) **4 Punkte**

Gegeben seien die Stützstellen $t_0 = t_1 = 0$ und $t_2 = t_3 = 1$.

(a) Berechnen Sie für eine Funktion $f \in C^1([0,1])$ die Gewichte $D_{t_0 \ldots t_j} f$ für $j = 0, \ldots, 3$ des kubischen Hermit - Interpolationspolynoms $P_{t_0 t_1 t_2 t_3} f$ mit Hilfe des Neville-Aitken-Schemas.

(b) Berechnen Sie für $f(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi}$ das Polynom $P_{t_0 t_1 t_2 t_3} f$ explizit.

Aufgabe 2 (Lagrange Interpolation) **4 Punkte**

Für $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ mit $h = \max_i |t_{i+1} - t_i|$ und $f \in C^2([a,b])$ betrachten wir den stückweise affinen Interpolationsoperator $\mathcal{I}_h$. Das bedeutet $(\mathcal{I}_h f)(t_i) = f(t_i)$ und $(\mathcal{I}_h f)\big|_{[t_{i-1}, t_i]}$ ist affin linear für alle i. Zeigen Sie

$$\max_{t \in [a,b]} |f(t) - (\mathcal{I}_h f)(t)| \leq C\, h^2 .$$

Hinweis: Verwenden Sie die Taylorentwicklung und den Mittelwertsatz.

Aufgabe 3 (Kubischer B-Spline) **4 Punkte**

Betrachten Sie die Knotenmenge $t_0 = 0 < \ldots < t_4 = 1$ mit $t_i = i/4$ für $i = 0, \ldots, 4$ und berechnen Sie den kubischen B-Spline $N_{0,4}(t)$ durch die rekursive Formel in Definition 1.21 explizit.

Aufgabe 4 (Interpolationsfehler) **4 Punkte**

Seien $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ gegeben und $f \in C^{n+1}([a,b])$. Definiere das n-dimensionale Simplex $\sum^n \subset \mathbb{R}^n$ durch

$$\sum^n = \left\{ s \in \mathbb{R}^n \,:\, \sum_{i=1}^n s_i \leq 1\,, \quad s_i \geq 0 \right\}$$

und setze $s_0 := 1 - \sum_{i=1}^n s_i$.

(a) Zeigen Sie zunächst per Induktion über n die Identität

$$D_{t_0,\ldots,t_n} f = \int_{\sum^n} f^{(n)}\Big(\sum_{i=0}^n s_i t_i \Big)\, ds_1 \, \ldots ds_n \,.$$

(b) Folgern Sie dann: es gibt ein $\tau \in [a,b]$ mit $D_{t_0,\ldots,t_n} f = \frac{1}{n!} f^{(n)}(\tau)$.

Hinweis: Benutzen Sie die Formel $\int_{\sum^n} ds_1 \, \ldots ds_n = \frac{1}{n!}$ (ohne Beweis).

(c) Zeigen Sie mit Hilfe obiger Darstellung von $D_{t_0,\ldots,t_n} f$ die Abschätzung

$$\max_{t \in [a,b]} |f(t) - (P_{t_0,\ldots,t_n} f)(t)| \,\leq\, C \,\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}\,.$$