Einführung in die Numerische Mathematik

Sommersemester 2015
Prof. Dr. Jochen Garcke
Patrick Diehl

universitätbonn

Übungsblatt 11.

Abgabe am **30.06.2015 vor der Vorlesung**.

Aufgabe 1. (Explizites Runge-Kutta Verfahren)

Wir betrachten ein explizites Runge-Kutta Verfahren der Stufe p. Geben Sie die Voraussetzungen b, c und A an, unter denen die Lipschitz-Bedingung an f

$$\exists L > 0 : \forall t \in [0,T], v, w \in \mathbb{R}^d : \|f(t,v) - f(t,w)\| \leq L\|v-w\|$$

die Lipschitz-Bedingung an ϕ

$$\exists \Omega > 0 \forall t \in [0,T], v, w \in \mathbb{R}^d, \tau < \tau_{\max} : \|\phi(t,v,\tau) - \phi(t,w,\tau)\| \leq \Omega\|v-w\|$$

impliziert.

(6 Punkte)

Aufgabe 2. (4-stufiges eingebettetes RK4(3)-Verfahren)

Bestimmen Sie ein 4-stufiges eingebettetes RK4(3)-Verfahren auf Basis das klassischen Runge-Kutta-Verfahrens.

a. Bestimmen Sie hierfür die Koeffizienten $\hat{b}$ so, dass ein zweites Verfahren 3. Ordnung entsteht.

b. Warum ergibt dies zusammen mit dem klassischen RK-Verfahren kein sinnvolles eingebettetes Verfahren?

(4 Punkte)

Aufgabe 3. (Mehrschrittverfahren)

m Gegensatz zu Einschrittverfahren nutzen Mehrschrittverfahren nicht nur die Werte eines einzigen, sondern mehrerer vorheriger Stützpunkte. Da im ersten Schritt jedoch i.a. nur der Wert eines Stützpunktes vorhanden ist, benötigt man zur Initialisierung noch ein Einschrittverfahren.
Betrachten Sie nun die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$u''(t) - 2u(t) = 1 \quad \text{mit} \quad u(0) = 1, \; u'(0) = 0.$$

Sie soll mit dem expliziten 3-Schritt-Verfahren

$$u^{(k+1)} = u^{(k)} + \frac{h}{12}\Big(23f(t_k, u_k) - 16f(t_{k-1}, u_{k-1}) + 5f(t_{k-2}, u_{k-2})\Big)$$

und der festen Schrittweite $h = 1$ gelöst werden. Führen Sie eine Startrechnung mit dem expliziten Euler-Verfahren durch und berechnen Sie anschließend den ersten Schritt des 3-Schritt-Verfahrens.

(4 Punkte)

Aufgabe 4. Sei $\tilde{x}(t_{k+1}$ die exakte Lösung des AWP mit Startwert $x(t_k) = g^{(k)}$. Zeigen Sie, dass mit

$$\hat{g}^{(k+1)} = \hat{g} + \frac{\tau_k}{2}\phi\left(t_k + \frac{\tau_k}{2}, \hat{g}, \frac{\tau_k}{2}\right)$$

und

$$\hat{g} = g^{(k)} + \frac{\tau_k}{2}\phi\left(t_k + \frac{\tau_k}{2}, g^{(k)}, \frac{\tau_k}{2}\right)$$

die Abschätzung für ein RK-Verfahren p-ter Ordnung

$$\tilde{x}(t_{k+1}) - y^{(k+1)} = \tau_k^{p+1} c(t_k, y^{(k)}) + \mathcal{O}(\tau_k^{p+2})$$

und

$$\tilde{x}(t_{k+1}) - \hat{y}^{(k+1)} = 2\left(\frac{\tau_k}{2}\right)^{p+1} c(\tau_k, y^{(k)}) + \mathcal{O}(\tau_k^{p+2})$$

gilt.

(4 Punkte)