Einführung in die Numerische Mathematik

Sommersemester 2015
Prof. Dr. Jochen Garcke
Patrick Diehl

universitätbonn

Übungsblatt 12.

Abgabe am **07.07.2015 vor der Vorlesung**.

Aufgabe 1. (Stabilitätsintervall)
Bestimmen Sie das Stabilitätsinterval

$$\mathrm{SI} := \{z = \lambda h \in \mathbb{C} | |R(z) \leq 1|\}$$

mit der Stabilitätsfunktion w zum impliziten einstufigen Runge-Kutta Verfahren

$$y^{(k)} = y^{(k-1)} + hk, \quad k = f\left(t_{k-1} + \frac{1}{2}h, y^{(k-1)} + \frac{1}{2}hk\right).$$

.

(6 Punkte)

Aufgabe 2. (Fixpunktiteration für implizite Euler-Verfahren)
Betrachten Sie die Fixpunktiteration zur Lösung der Rekursionsgleichung

$$u^{(k+1)} = u^{(k)} + hf\left(\tau_{k+1}, u^{(k+1)}\right)$$

des impliziten Euler-Verfahren mit $\tau_k = k * h$ und $i = 0, \dots, N$. Zeigen Sie, dass die Fixpunktiteration konvergiert, falls f bezüglich der euklidischen Norm $\|\cdot\|_2$ der folgenden Lipschitz-Bedingung genügt,

$$\|f(\tau, y) - f(\tau, z)\|_2 \leq L\|y - z\|_2 \quad y, z \in \mathbb{R}^d, \quad \tau \in [0, T],$$

und die Schrittweite h kleiner als $1/L$ gewählt wird. Geben Sie eine Funktion f an, für die die Fixpunktiteration im Fall $h = 1/L$ divergiert.

(4 Punkte)

Aufgabe 3. Das Einschrittverfahren $\dot{x} = Ax$, $x(0) = x_0$ erfüllt

$$y^{(k+1)} = R(hA)y^{(k)}, \quad y^{(0)} = x_0 \text{ mit}$$

einer rationalen Funktion $R(\cdot)$, einer diagonalisierbaren Matrix $A^{n \times n}$ mit den Eigenwerten λ_v und den Eigenvektoren w_v.

a. Zeigen Sie, dass wenn das Einschrittverfahren konsistent mit dem AWP ist, dann gilt

$$R(0) = 1.$$

b. Hat das Einschrittverfahren die Ordnung p, dann gilt

$$R(z) = \exp(z) + \mathcal{O}(z^{p+1}), \qquad (z \to 0).$$

Hinweis:
Stellen Sie zuerst den Abschneidefehler mithilfe von $R(hA)$ da. Sie können dann benutzen, dass für λ ist Eigenwert von A mit Eigenvektor w gilt: $R(h\lambda)$ ist Eigenwert von $R(hA)$ mit Eigenvektor w.

(4 Punkte)

Aufgabe 4. Das AWP

$$\dot{x}(t) = -\lambda\,(x(t) - \exp(-t)) - \exp(-t), \quad x(0) = 1$$

besitzt für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ die eindeutige Lösung $x(t) = \exp(-t)$. Verwenden Sie die Implementierung des Runge-Kutta Verfahrens von Blatt 10 und plotten Sie für folgende Konfigurationen den Fehler zur exakten Lösung. Geben Sie zusätzlich noch den Fehler als Tabelle ab.

Konfiguration	1	2
z	$[0,1]$	$[0,0.1]$
λ	1	1000
Schrittweite	0.01	0.01

Hinweis:
Eine Lösung zur Programmieraufgabe von Blatt 10 finden Sie auf der Webseite.

(4 Punkte)