Institut für Numerische Simulation
Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

Übungen zu Einführung in die Numerische Mathematik (V2E2)

Sommersemester 2016

Prof. Dr. Martin Rumpf — Pascal Huber — Sascha Tölkes

Übungsblatt 1 — Abgabe: 26.04.2016

Aufgabe 1 (Lineares Differentialgleichungssystem I) — 4 Punkte

Zeigen Sie durch Konstruktion mit einer Fixpunktiteration, dass das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y' &= \mathbf{A}y\,, & \mathbf{A} &\in \mathbb{R}^{n\times n}\,,\\ y(t_0) &= y_0\,, & y_0 &\in \mathbb{R}^n\,, \end{aligned}$$

mit $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine Lösung der Form

$$y(t) = \exp(\mathbf{A}(t-t_0))y_0$$

hat. Hierbei ist das Matrixexponential einer Matrix $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ definiert durch $\exp(\mathbf{B}) := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\mathbf{B}^j}{j!}$.

Aufgabe 2 (Lineares Differentialgleichungssystem II) — 4 Punkte

Betrachten Sie die vektorwertige Differentialgleichung

$$y'(t) = \mathbf{A}y(t) \quad \text{mit} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \quad y(0) = y_0.$$

Nach Aufgabe 1 ist eine Lösung durch $y(t) = \exp(\mathbf{A}t)y_0$ für $t \in \mathbb{R}$ gegeben. Berechnen Sie $\exp(\mathbf{A}t)$.

Benutzen Sie das Ergebnis um zu zeigen, dass $y(t) = (\cos(t), \sin(t))$ eine Lösung für den Startwert $y_0 = (1,0)^T$ gegeben ist.

Aufgabe 3 (Variation der Konstanten) — 4 Punkte

Geben Sie die Lösungen der folgenden Anfangswertprobleme an:

(i) $y'(t) = 2ty + t^3\,, \quad y(0) = y_0$

(ii) $y'(t) = \sin(t)y(t) + \sin(t)\,, \quad y(0) = 0$

Aufgabe 4 (Gronwall'sches Lemma) **4 Punkte**

In dieser Aufgabe beweisen Sie das *Gronwall'sche Lemma*, welches ein zentrales Hilfsmittel zum Beweis der Eindeutigkeit für Lösungen von gewöhnlichen Differentialgleichungen ist.

Sei $I = [a, b]$ mit $-\infty < a < b < \infty$ und seien $u, \alpha \in C(I, \mathbb{R})$ sowie $\beta \in C(I, [0, \infty))$ gegeben. Es gelte die Integralungleichung

$$u(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \beta(s)u(s)\, ds \quad \text{für alle } t \in I.$$

Dann besagt das Gronwall'sche Lemma, dass

$$u(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \alpha(s)\beta(s) \exp\left(\int_s^t \beta(r)\, dr\right) ds \quad \text{für alle } t \in I. \tag{1}$$

Beachten Sie, dass die Funktion u in (1) nur noch auf der linken Seite der Ungleichung vorkommt.

Für den Beweis von (1) gehen Sie in zwei Schritten vor:

(i) Sei $v\colon I \to \mathbb{R}$ durch $v(s) := \exp\left(-\int_a^s \beta(r)\, dr\right) \int_a^s \beta(r)u(r)\, dr$ gegeben. Betrachten Sie die Ableitung von v und zeigen Sie mit Hilfe des Fundamentalsatzes der Analysis

$$v(t) \leq \int_a^t \alpha(s)\beta(s) \exp\left(-\int_a^s \beta(r)\, dr\right) ds \quad \text{für alle } t \in I. \tag{2}$$

(ii) Beweisen Sie die Gronwall'sche Ungleichung unter Zuhilfenahme von Gleichung (2).