Institut für Numerische Simulation
Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

universitätbonn

Übungen zu Einführung in die Numerische Mathematik (V2E2)

Sommersemester 2016

Prof. Dr. Martin Rumpf — Pascal Huber — Sascha Tölkes

Übungsblatt 5 — Abgabe: 31.05.2016

Aufgabe 15 (Fehlerabschätzung für Ableitungen) — 4 Punkte

Sei $T \subset \mathbb{R}^d$ ein nicht-degeneriertes Simplex mit Durchmesser $h > 0$ und sei $f \in C^{k+1}(T)$. Verfahren Sie ähnlich zum Beweis von Satz 2.13 aus der Vorlesung und zeigen Sie, dass für die Ableitungen von f die Fehlerabschätzungen

$$\|\partial_x^\beta (f - I_h(f))\|_{\infty,T} \leq C\, h^{k+1-|\beta|} \|D_x^{k+1} f\|_{\infty,T}$$

gelten, wobei $I_h(f) \in \mathcal{P}_k^d$ das Interpolationpolynom von f auf dem Simplex T und $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_d)$ ein Multiindex mit $|\beta| \leq k$ ist.

Hinweise:

- *Falls Ihnen Schritt (ii) des Beweises Schwierigkeiten macht, können Sie stattdessen versuchen, die Aussage für $f \in C^{k+|\beta|+1}(T)$ zu zeigen.*
- *Zeigen Sie für Schritt (iv) des Beweises, dass eine Ungleichung der Form*

  $$\|\partial_x^\beta (f - I_h(f))\|_{\infty,T} \leq C_\beta(A_T^{-1}) \max_{|\gamma|=|\beta|} \|\partial_{\hat{x}}^\gamma (\hat{f} - \widehat{I}(\hat{f}))\|_{\infty,\widehat{T}}$$

  gilt und finden Sie eine passende Abschätzung für $C_\beta(A_T^{-1})$.

Aufgabe 16 (Diskrete Energieminimierung) — 4 Punkte

Gesucht seien Minimierer der Energie

$$E[u] = \int_0^1 |u'|^2 - u\, dx$$

mit $u \in C^1([0,1])$ und Randwerten $u(0) = u(1) = 0$. Dazu betrachten wir folgende Approximation: Zu $h = \frac{1}{N}$ definieren wir einen endlich dimensionalen Raum von Funktionen

$$\mathcal{V}_h = \Big\{ u_h : [0,1] \to \mathbb{R} \,\Big|\, u_h|_{[ih,(i+1)h]} \text{ ist affin für } i = 0, \cdots, N-1, \\ u_h \in C^0([0,1]), u_h(0) = u_h(1) = 0 \Big\}$$

und eine Approximation der Energie

$$E_h[u_h] = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{ih}^{(i+1)h} |u_h'|^2 - u_h\, dx.$$

(i) Geben Sie eine Basis $\{\varphi_h^i\}_{i=1,\cdots,N-1}$ von $\mathcal{V}_h$ an.

(ii) Für $u_h(x) = \sum_{i=0}^{N-1} u_h^i \varphi_h^i(x)$, $u_h^i \in \mathbb{R}$ betrachten Sie die Abbildung

$$\bar{E}_h : \mathbb{R}^{N-1} \to \mathbb{R};\ (u_h^i)_{i=1,\cdots,N-1} \to E_h[u_h(x)].$$

Berechnen Sie $\frac{\partial \bar{E}_h}{\partial u_h^i}$.

(iii) Stellen Sie die notwendige Bedingung für ein Minimum von E_h auf $\mathcal{V}_h$ als Gleichungssystem dar.

Bemerkung: Dieses Gleichungssystem sollte ähnlich eines Ihnen aus der Vorlesung bekannten sein.

Aufgabe 17 (Tensorproduktinterpolation im $\mathbb{R}^m$) 4 Punkte

Sei $\Omega = (a, b)^m$ und $t_0, \dots t_n \in [a, b]$ seien paarweise verschieden. Weiterhin sei

$$\mathcal{N} := \{x^\alpha | \alpha = (\alpha_1, \dots \alpha_m), \alpha_i \in 0, \dots n, x^\alpha = (t_{\alpha_1}, \dots t_{\alpha_m})\}.$$

Sei $\mathcal{P} := \underbrace{\mathcal{P}_n \otimes \cdots \otimes \mathcal{P}_n}_{m \text{ Faktoren}}$, d. h.

$$\begin{aligned}\mathcal{P} = \{p : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} \,|\, t \mapsto p(x_1, \dots x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots x_m) \in \mathcal{P}_n \\ \text{für } 1 \le i \le m \text{ und } x_1, \dots x_{i-1}, x_{i+1}, \dots x_m \in \mathbb{R}\}.\end{aligned}$$

(i) Geben Sie eine Lagrange-Basis von $\mathcal{P}$ an.

(ii) Zeigen Sie, dass zu $f \in C^0(\bar{\Omega})$ genau ein $p \in \mathcal{P}$ existiert, das $f(x) = p(x)$ für alle $x \in \mathcal{N}$ erfüllt.

(iii) Geben Sie die Lagrange-Basis für $m = 3$, $a = t_0 = 0$, $b = t_1 = 1$ und $n = 1$ explizit an.

Aufgabe 18 (Basiskonstruktion auf Prisma) 4 Punkte

Gegeben sei ein Prisma, konstruieren Sie über einen Tensorproduktansatz (bzgl. eines Intervalls und eines Dreiecks) eine Basis eines bilinearen und eines biquadratischen Polynomraums. Verwenden Sie als Koordinaten $(\mu_0, \mu_1, \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$, wobei μ_i bzw. λ_i die baryzentrischen Koordinaten auf dem Intervall als 1-Simplex bzw. dem Dreieck als 2-Simplex bezeichnen.