Institut für Numerische Simulation
Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

universität bonn

Übungen zu Einführung in die Numerische Mathematik (V2E2)

Sommersemester 2016

Prof. Dr. Martin Rumpf — Pascal Huber — Sascha Tölkes

Übungsblatt 7 — Abgabe: 14.06.2016

Aufgabe 22 (Greensche Funktion) — 4 Punkte

Gegeben sei die Greensche Funktion

$$G\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \quad G(x,y)=\frac{1}{2}[(1-x)|y|+x|y-1|-|x-y|].$$

Zeigen Sie, dass die Funktion

$$u(x)=\int_0^1 G(x,y)f(y)\,\mathrm{d}y+g(x)$$

mit $f\in C^2(\mathbb{R})$, $f(y)=0$ für alle $y\notin(0,1)$, $g(x)=g_0+x(g_1-g_0)$ und $g_0,g_1\in\mathbb{R}$ das folgende Randwertproblem löst:

$$\begin{cases}-u''=f, & \text{in } (0,1),\\ u(0)=g_0, \\ u(1)=g_1.\end{cases}$$

Aufgabe 23 (Interpolationsfehler im eindimensionalen Fall) — 4 Punkte

Man unterteile das geschlossene Einheitsinterval $[0,1]$ in $N+1=\frac{1}{h}$ äquidistante Teilintervalle $I_i=[(i-1)h,ih]$ und betrachte den Raum der quadratischen stückweise Polynome

$$V_h:=\left\{v_h\in C^0[0,1]\colon v_h|_{I_i}\in\mathcal{P}_2 \text{ für alle } i \text{ und } v_h(0)=v_h(1)=0\right\}.$$

Für eine Funktion $u\in C^2[0,1]$ mit $u(0)=u(1)=0$ und $u'''\in L^2(0,1)$ bezeichne $\mathcal{I}_h u\in V_h$ die Interpolierende. Die Interpolation sei an den Stellen ih und weiteren äquidistanten Zwischenstellen (jeweils eine für jedes Teilintervall) durchgeführt. Beweisen Sie die Interpolationsabschätzung

$$\|u'-(\mathcal{I}_h u)'\|_{L^2(0,1)}\le Ch^2\|u'''\|_{L^2(0,1)}.$$

Hinweis: Betrachten Sie für den Beweis die Funktion $v=u-\mathcal{I}_h u$ und benutzen Sie den Mittelwertsatz. Leiten sie daraus Abschätzungen für $v''(x)$ und $v'(x)$ in Abhängigkeit von $\|v'''\|_{L^2(0,1)}$ her.

Aufgabe 24 (Rotation eines Vektorfeldes) **4 Punkte**

Es sei $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^3$ mit glattem Rand und n die äußere Normale an $\partial\Omega$. Man zeige folgende Aussagen:

(i) Für $u \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^3)$

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} u = \operatorname{grad}\operatorname{div} u - \Delta u$$

insbesondere gilt $\operatorname{rot}\operatorname{rot} u = -\Delta u$, falls u divergenzfrei ist.

(ii) Für $u, v \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^3)$ gilt

$$\int_\Omega (\operatorname{rot} u) v = \int_\Omega u (\operatorname{rot} v),$$

falls u, v, n linear abhängig auf $\partial\Omega$ sind, insbesondere falls $u \times n = 0$ auf $\partial\Omega$.

Aufgabe 25 (Elliptisches Randwertproblem auf einem Ring) **4 Punkte**

(i) Zeigen Sie, dass $\Delta_x \ln(r) = 0$, wobei $r = \|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ und $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

(ii) Gegeben sei der Ring $\Omega = (B_2(0) \setminus B_{\frac{1}{2}}(0)) \subset \mathbb{R}^2$. Bestimmen Sie die schwache Lösung des Randwertproblems

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a\nabla u) = 0, & \text{auf } B_2(0) \setminus B_{\frac{1}{2}}(0), \\ u = 1, & \text{auf } \partial B_{\frac{1}{2}}(0), \\ u = 0, & \text{auf } \partial B_2(0), \end{cases}$$

mit der Funktion $a \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$ definiert durch

$$a(x) = \begin{cases} 1, & \|x\| \leq 1, \\ 2, & \|x\| > 1. \end{cases}$$