Aufgabe 4: Bestimmen Sie die Taylorentwicklung 4. Ordnung von

$$f(x) = -\ln(1 - \frac{x}{2})$$

um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

Lösung: Zunčhst bestimmen wir die ersten vier Ableitungen von $f(x)$. Es gilt

$$\begin{aligned}
f'(x) &= -\frac{1}{1-\frac{x}{2}} \cdot (-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2-x} \\
f''(x) &= -\frac{1}{(2-x)^2} \cdot (-1) = \frac{1}{(2-x)^2} \\
f'''(x) &= -2\frac{1}{(2-x)^3} \cdot (-1) = \frac{2}{(2-x)^3} \\
f^{(4)}(x) &= -6\frac{1}{(2-x)^4} \cdot (-1) = \frac{6}{(2-x)^4}
\end{aligned}$$

Für die Taylerentwicklung gilt nun

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{6}(x - x_0)^3 + \frac{f^{(4)}(x_0)}{24}(x - x_0)^4 + R_5(x).$$

Somit ergibt sich für die Entwicklung um $x_0 = 0$:

$$f(x) = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{24} + \frac{x^4}{64} + R_5(x)$$

Aufgabe 5: Bestimmen Sie das Taylorpolynom dritter Ordnung von

$$f(x) = \sin^2(x)$$

an der Stelle $x_0 = 0$.

Lösung: Wir bestimmen zunächst die ersten drei Ableitungen und berechnen deren Werte im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sin^2(x) & \Rightarrow f(0) &= 0 \\
f'(x) &= 2\sin(x)\cos(x) & \Rightarrow f'(0) &= 0 \\
f''(x) &= 2\cos^2(x) - 2\sin^2(x) & \Rightarrow f''(0) &= 2 \\
f^{(3)}(x) &= -8\sin(x)\cos(x) & \Rightarrow f^{(3)}(0) &= 0
\end{aligned}$$

Die Tayorentwicklung von $f(x)$ lautet damit

$$f(x) = \frac{0}{0!}x^0 + \frac{0}{1!}x^1 + \frac{2}{2!}x^2 + \frac{0}{3!}x^3 + R_4[x] = x^2 + R_4(x).$$