Aufgabe 6: Gegeben sind die Punkte $x_0 = 1, x_1 = 2, x_2 = 3$. Bestimme das Interpolationspolynom zu den Werten $y_0 = 2, y_1 = 4, y_2 = 8$:

a) In der Monombasis

b) In der Lagrangebasis

LÖSUNG: Aufstellen der Vandermonde-Matrix liefert

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

Wir suchen V^{-1}:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$
$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{2} & 4 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

Also haben wir

$$V^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -\frac{5}{2} & 4 & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} .$$

Da sich die Koeffizienten des Interpolationspolynoms in der Monom-Basis aus dem linearen Gleichungssystem $V\mathbf{a} = \mathbf{y}$ bestimmen, bekommen wir

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -\frac{5}{2} & 4 & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Also ist das gesuchte Polynom gerade $p(x) = 2 - x + x^2$.

Die Lagrange-Basis ist gegeben durch

$$
\begin{aligned}
L_0(x) &= \frac{x-x_1}{x_0-x_1}\cdot\frac{x-x_2}{x_0-x_2} = \frac{(x-2)(x-3)}{2} = \frac{x^2-5x+6}{2}\\
L_1(x) &= \frac{x-x_0}{x_1-x_0}\cdot\frac{x-x_2}{x_1-x_2} = \frac{(x-1)(x-3)}{-1} = -\left(x^2-4x+3\right)\\
L_2(x) &= \frac{x-x_1}{x_2-x_0}\cdot\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{(x-1)(x-2)}{2} = \frac{x^2-3x+2}{2}
\end{aligned}
$$

Das heisst, wir bekommen

$$p(x) = 2L_0(x) + 4L_1(x) + 8L_2(x) = 2 - x + x^2 \ .$$

Aufgabe 7: Bestimmen Sie ein quadratisches Polynom $p(x)$, das in 0, $\frac{\pi}{2}$ und π mit $f(x) = \sin x$ übereinstimmt.
Rechnen Sie den Fehler $|f(x) - p(x)|$ in $x = \frac{\pi}{4}$ explizit aus.

LÖSUNG:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sin x\\
f(0) &= \sin 0 = 0\\
f(\pi/2) &= \sin(\pi/2) = 1\\
f(\pi) &= \sin(\pi) = 0\\
f(\pi/4) &= \sin(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}
$$

Gesucht: $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ mit $p(0) = 0,\ p(\pi/2) = 1,\ p(\pi) = 0$

Lagrangeformel: $p(x) = 0\,p_0(x) + 1\,p_{\frac{\pi}{2}}(x) + 0\,p_\pi(x)$

$$
\begin{aligned}
p_{\frac{\pi}{2}}(x) &= \frac{(x-0)(x-\pi)}{(\frac{\pi}{2}-0)(\frac{\pi}{2}-\pi)}\\
&= -\frac{4}{\pi^2}x(x-\pi) = \frac{4}{\pi}x - \frac{4}{\pi^2}x^2
\end{aligned}
$$

Alternativ:

$$
\begin{aligned}
p(0) = 0 \quad &\Rightarrow \quad a_0 = 0\\
p(\pi/2) = 1 \quad &\Rightarrow \quad a_1\frac{\pi}{2} + a_2\frac{\pi^2}{4} = 1\\
&\Rightarrow \quad 2a_1\pi + a_2\pi^2 = 4 \quad \mathrm{I}\\
p(\pi) = 0 \quad &\Rightarrow \quad a_1\pi + a_2\pi^2 = 0 \quad \mathrm{II}
\end{aligned}
$$

I-II: $a_1\pi = 4 \ \Rightarrow \ a_1 = \frac{4}{\pi}$
Einsetzen in II: $4 + a_2\pi^2 = 0 \ \Leftrightarrow \ a_2 = -\frac{4}{\pi^2}$.

Explizite Berechnung des Fehlers:

$$|p(\pi/4) - f(\pi/4)| = 0,75 - 0,707106781 \approx 0,042893219$$