Aufgabe 8: Betrachten Sie die folgende Interpolationsaufgabe:
Gegeben ist eine stetige Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. Zur Interpolation wird das Intervall $[0,1]$ in vier gleichgroße Teilintervalle $[x_i, x_{i+1}]$ mit $x_i = \frac{i}{4}$ zerlegt. Auf jedem dieser Teilintervalle soll f durch eine affine Funktion p_i (d.h. ein Polynom ersten Grades) interpoliert werden, die beiden für die Lagrange-Interpolation nötigen Knoten sollen stets auf den Intervallgrenzen liegen. D.h. $p_i(x_i) = f(x_i)$ und $p_i(x_{i+1}) = f(x_{i+1})$. Geht man davon aus, dass jede dieser interpolierenden Funktionen p_j, nur auf dem jeweiligen Teilintervall definiert ist, so kann man sie zu einer Funktion p zusammensetzen, die auf dem ganzen Intervall $[0,1]$ definiert ist.

a) Zeichnen Sie eine Skizze der Situation.

b) Gilt $p(x_j) = f(x_j)$ für $j = 0, 1, 2, 3, 4$?

c) Ist p stetig, ist p differenzierbar?

d) Wie sieht die Interpolierende ϕ_2 aus, wenn $f(x_2) = 1$ und $f(x_0) = f(x_1) = f(x_3) = f(x_4) = 0$ vorgegeben wird?

e) Definieren Sie analoge Funktionen ϕ_i für die anderen Knoten x_i und interpretieren Sie diese als Basis für *stückweise affine Interpolation.*

LÖSUNG:

a) Stückweise affine Interpolation.

b) Ja.

c) Stetig: Ja. In den Teilintervallen klar, an den Grenzen gilt $p_{j-1}(x_j) = p_j(x_j)$. Differenzierbar: Nur im Inneren der Teilintervalle.

d) Hütchenfunktion.

e) Hütchenbasis.

Aufgabe 9: Gegeben sei eine stetige Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, die wir auf dem Definitionsbereich numerisch integrieren wollen. Dazu teilen wir das Intervall $[0,1]$ in vier gleichgroße Teilintervalle $[x_i, x_{i+1}]$ mit $x_i = \frac{i}{4}$ auf und approximieren f auf jedem Teilintervall durch eine affine Funktion.

a) Berechnen Sie die Integrale der Lagrangepolynome über die Teilintervalle. (Welche Integrale müssen gleich sein?)

b) Bestimmen Sie basierend darauf eine numerische Integrationsformel.

LÖSUNG: Um die Funktion f auf dem Teilintervall $[x_i, x_{i+1}] = [\frac{i}{4}, \frac{i+1}{4}]$ durch eine affine Funktion zu approximieren benötigen wir zwei Lagrangepolynome. $L_i(x)$ und $L_{i+1}(x)$, wobei $L_i(x_i) = 1$, $L_i(x_{i+1}) = 0$, $L_{i+1}(x_i) = 0$ und $L_{i+1}(x_{i+1}) = 1$. Diese sind gegeben durch

$$\begin{aligned} L_i(x) &= \frac{\left(x - \frac{i+1}{4}\right)}{\left(\frac{i}{4} - \frac{i+1}{4}\right)} = -4x + (i+1) \\ L_{i+1}(x) &= \frac{\left(x - \frac{i}{4}\right)}{\left(\frac{i+1}{4} - \frac{i}{4}\right)} = 4x - i \end{aligned}$$

a) Betrachtet man das Intervall $[\frac{i}{4}, \frac{i+1}{4}]$, so handelt es sich bei der Fläche unter den beiden Funktion L_i und L_{i+1} jeweils um ein Dreieck mit denselben Seitenlängen. Somit gilt

$$\int_{\frac{i}{4}}^{\frac{i+1}{4}} L_i(x)\,dx = \int_{\frac{i}{4}}^{\frac{i+1}{4}} L_{i+1}(x)\,dx.$$

Des weiteren ist der Wert dieser Integrale für alle vier Teilintervalle gleich, so dass wir die Rechnung vereinfachen können, indem wir das Intervall $[0, \frac{1}{4}]$ betrachten.

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{4}} L_0(x)\,dx &= \int_0^{\frac{1}{4}} -4x + 1\,dx \\ &= -2x^2 + x \Big|_0^{\frac{1}{4}} \\ &= \frac{1}{8} \end{aligned}$$

b) Um die Funktion f auf dem ganzen Intervall $[0, 1]$ zu integrieren, spalten wir das Integral in Teilintegrale über die Intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ auf. Des weiteren integrieren wir auf diesen Intervallen nicht die Funktion f, sondern ihre affine Approximation.

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x)\,dx &\approx \sum_{i=0}^{3} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x_i)L_i(x) + f(x_{i+1})L_{i+1}(x)\,dx \\ &= \sum_{i=0}^{3} f(x_i) \int_{x_i}^{x_{i+1}} L_i(x)\,dx + f(x_{i+1}) \int_{x_i}^{x_{i+1}} L_{i+1}(x)\,dx \\ &= \frac{1}{8} \sum_{i=0}^{3} [f(x_i) + f(x_{i+1})] \\ &= \frac{1}{8} \left[f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{3} f(x_i) + f(x_4) \right] \end{aligned}$$