Aufgabe 10: Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke:

a) $(4+3i)+2(6-2i)=?$

b) $(4+3i)(6-2i)=?$

c) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)^3=?$ Interpretieren Sie dies geometrisch!

LÖSUNG:

a)

$$\begin{aligned}(4+3i)+2(6-2i) &= 4+3i+12-4i\\ &= 16-i\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}(4+3i)(6-2i) &= 24+18i-8i+6\\ &= 30+10i\end{aligned}$$

c) Umrechnung in Polarkoordinaten.

$$r=\frac{\sqrt{3+1}}{2}=1, \qquad \sin\phi=\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \phi=\frac{\pi}{6}$$

Damit ergibt sich

$$\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i=\exp\left(i\frac{\pi}{6}\right), \qquad \left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)^3=\exp\left(i\frac{\pi}{2}\right)=i.$$

Wegen $r=1$ handelt es sich bei der Multiplikation um eine reine Drehung in der komplexen Zahlenebene, und zwar um den Winkel $\phi=\frac{\pi}{6}$. Daher wird 1 drei mal um jeweils 30°, also insgesamt um 90° nach links gedreht.

Alternativ:

$$\begin{aligned}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)^3 &= \left(\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}i-\frac{1}{4}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)\\ &= \left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)\\ &= \frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{3}{4}i+\frac{1}{4}i-\frac{\sqrt{3}}{4}\\ &= i\end{aligned}$$

Aufgabe 11: Welche der folgenden Gleichungen sind richtig?

a) $e^{i\frac{\pi}{2}} = -i.$ ja ☐ nein ☐

b) $e^{i\frac{\pi}{2}} = i.$ ja ☐ nein ☐

c) $e^{i\frac{\pi}{4}} = -\sqrt{i}.$ ja ☐ nein ☐

d) $e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{i}.$ ja ☐ nein ☐

e) $e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,(1+i).$ ja ☐ nein ☐

LÖSUNG:

a) Nein!

b) Ja!

c) Nein!

d) Ja!

e) Ja!

Begründung:
Die Eulersche Formel lautet: $e^{ix} = \cos x + i \sin x$. Daraus ergibt sich:

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = 0 + i \cdot 1 = i\,,$$

wegen $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ und $\sin\frac{\pi}{2} = 1$.
Wegen

$$e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)} = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{2} - i\sin\frac{\pi}{2} = 0 - i\cdot 1 = -i\,,$$

da $\cos(-x) = \cos x$ (cos ist gerade!) und $\sin(-x) = -\sin x$ (sin ist ungerade!),
gilt also

a) Nein!

b) Ja!

Wegen $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$ gilt $e^{i\frac{\pi}{4}} = \left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^{1/2} = \pm i^{\frac{1}{2}} = \pm\sqrt{i}$.
Die Eulersche Formel besagt:

$$e^{i\frac{\pi}{4}} = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\,.$$

$\dfrac{\pi}{4}$ entspricht einem Winkel von $45°$.
Behauptung: $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin\frac{\pi}{4}$.
Nachweis:

- $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \;\Rightarrow\; \cos\frac{\pi}{4} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{4}$.

- $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$ (folgt aus Additionstheorem für sin!)

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad 1 = \sin\frac{\pi}{2} = \sin\left(2\frac{\pi}{4}\right) = 2\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4} \\
&\Rightarrow \quad \frac{1}{2} = \sin^2\frac{\pi}{4} \quad \text{wegen } \sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} \\
&\Rightarrow \quad \sin\frac{\pi}{4} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{wegen } \sin\frac{\pi}{4} > 0\,!
\end{aligned}$$

Also gilt:

$$\begin{aligned}
e^{i\frac{\pi}{4}} &= \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)
\end{aligned}$$

d.h. es gilt:

e) Ja!

Weiter gilt:

$$\begin{aligned}
\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right]^2 &= \frac{2}{4}(1+i)^2 = \frac{1}{2}(1+2i+i^2) \\
&= \frac{1}{2}(1+2i-1) = i\,.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad \sqrt{i} &= \sqrt{e^{i\frac{\pi}{2}}} = e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\,, \\
-\sqrt{i} &= -\sqrt{e^{i\frac{\pi}{2}}} = -e^{i\frac{\pi}{4}} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(1+i)\,.
\end{aligned}$$

Also:

c) Nein!

d) Ja!