Aufgabe 12: Diagonalisieren Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},$$

d.h. bestimmen Sie eine Diagonalmatrix D sowie eine Orthogonalmatrix U, so dass $A = UDU^T$ gilt.

LÖSUNG: **Berechnung des charakteristischen Polynoms:**

$$P(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)^2 - 1$$

Berechnung der Eigenwerte von A:

$$\begin{array}{rrcl} & P(\lambda) & = & 0 \\ \Leftrightarrow & (3-\lambda)^2 - 1 & = & 0 \\ \Leftrightarrow & \lambda & = & 3 \pm \sqrt{1} = 2 \text{ oder } 4 \end{array}$$

Berechnung eines Eigenvektors zum Eigenwert $\lambda_1 = 2$:

$$\begin{array}{rrcl} & (A - 2\mathbb{1}) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & = & 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} & & \\ \Rightarrow & x & = & -y \end{array}$$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist normierter Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = 2$.

Berechnung eines Eigenvektors zum Eigenwert $\lambda_2 = 4$:

$$\begin{array}{rrcl} & (A - 4\mathbb{1}) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & = & 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} & & \\ \Rightarrow & x & = & y \end{array}$$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist normierter Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_2 = 4$.

$$\Rightarrow U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$U^{-1} = U^T = U$$

$$\begin{aligned} U^TAU &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Aufgabe 13: Zeigen Sie, dass die Drehmatrix

$$D = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

und die Spiegelungsmatrix

$$S = \mathbb{1} - 2nn^T \quad \text{mit} \quad n \in \mathbb{R}^3,\ \|n\| = 1$$

orthogonal sind.
Sind sie auch symmetrisch?

LÖSUNG:

$$\begin{aligned} D^TD &= \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2\alpha + \sin^2\alpha & -\cos\alpha\sin\alpha + \cos\alpha\sin\alpha \\ -\cos\alpha\sin\alpha + \cos\alpha\sin\alpha & \sin^2\alpha + \cos^2\alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$D \neq D^T$ für $\alpha \neq k\pi$
Die Drehmatrix D ist also orthogonal aber in der Regel nicht symmetrisch.

Die Spiegelungsmatrix S ist symmetrisch, denn

$$\begin{aligned} S^T &= \left(\mathbb{1} - 2nn^T\right)^T \\ &= \mathbb{1}^T - 2\left(nn^T\right)^T \\ &= \mathbb{1} - 2n^{T^T}n^T \\ &= \mathbb{1} - 2nn^T \\ &= S. \end{aligned}$$

Des weiteren ist sie auch orthognal, denn

$$\begin{aligned} S^TS = SS &= (\mathbb{1} - 2nn^T)(\mathbb{1} - 2nn^T) \\ &= \mathbb{1} - 2nn^T - 2nn^T + 4n\underbrace{n^Tn}_{=n\cdot n=1}n^T \\ &= \mathbb{1} - 4nn^T + 4nn^T \\ &= \mathbb{1}. \end{aligned}$$