Aufgabe 14: Angenommen, wir werfen einen Ball senkrecht nach oben und vernachlässigen im Folgenden die Reibung. Wir lassen den Ball in einer Höhe von 1 m mit einer Geschwindigkeit von $20\frac{\text{m}}{\text{s}}$ los und er erfahre die ganze Zeit über die (Erd-) Beschleunigung von $-10\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

a) Berechnen Sie die Funktion $h(t)$, die die Höhe des Balls in Abhängigkeit von der Zeit angibt. Lösen Sie dazu die Differentialgleichung

$$\ddot{h}(t) = -10$$

erst ohne und anschließend mit Anfangswerten.

b) Zu welcher Zeit $T > 0$ schlägt der Ball auf dem Boden auf, d. h. für welches $T > 0$ gilt $h(T) = 0$?

c) Mit welcher Geschwindigkeit $\dot{h}(T)$ trifft der Ball auf der Erde auf?

LÖSUNG:

a) $\ddot{h}(t) = -10$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \dot{h}(t) &= \int_0^t \ddot{h}(s)\,ds + C_1 \\ &= \int_0^t -10\,ds + C_1 \\ &= -10t + C_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad h(t) &= \int_0^t \dot{h}(s)\,ds + C_2 \\ &= \int_0^t (-10s + C_1)\,ds + C_2 \\ &= -5t^2 + C_1 t + C_2 \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung ohne Berücksichtigung der Anfangswerte lautet

$$h(t) = -5t^2 + C_1 t + C_2.$$

Unter Berücksichtigung der Anfangswerte ergibt sich:

$$h(0) = C_2 \stackrel{!}{=} 1 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 1$$

$$\dot{h}(0) = C_1 \stackrel{!}{=} 20 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 20$$

und somit

$$h(t) = -5t^2 + 20t + 1.$$

b)

$$
\begin{array}{rrcl}
 & h(t) & = & 0 \\
\Leftrightarrow & -5t^2+20t+1 & = & 0 \\
\Leftrightarrow & t^2-4t-\frac{1}{5} & = & 0 \\
\Leftrightarrow & (t-2)^2-4-\frac{1}{5} & = & 0 \\
\Leftrightarrow & (t-2)^2 & = & \frac{21}{5} \\
\Leftrightarrow & t & = & 2\pm\sqrt{\frac{21}{5}} \approx -0{,}04939 \text{ oder } 4{,}04939
\end{array}
$$

$\Rightarrow T = 2+\sqrt{\frac{21}{5}} \approx 4{,}04939$

c)

$$
\dot{h}(T) = -10\left(2+\sqrt{\frac{21}{5}}\right)+20 = -10\sqrt{\frac{21}{5}} \approx -20{,}4939
$$