Aufgabe 8: Welche der folgenden Gleichungen sind richtig?

a) $\displaystyle\int \sin(2x)\,dx = (\sin x)^2$ ja ☐ nein ☐

b) $\displaystyle\int \cos^2(x) + \sin^2(x)\,dx = x$ ja ☐ nein ☐

c) $\displaystyle\int 2x \cos x\,dx = \sin(x^2)$ ja ☐ nein ☐

d) $\displaystyle\int x \cdot e^x\,dx = x - e^x$ ja ☐ nein ☐

e) $\displaystyle\int \sin(2x)\,dx = \frac{1}{2}\cos(2x)$ ja ☐ nein ☐

LÖSUNG:

a) Ja! Denn: $(\sin^2 x)' = 2\sin x \cos x = \sin(2x)$.
Benutzt: Kettenregel und Additionstheorem für sin!

b) Ja! Denn: $(x)' = 1 = \cos^2 x + \sin^2 x$.

c) Nein! Denn: $(\sin(x^2))' = \cos(x^2) \cdot 2x \neq 2x \cdot \cos x$ für $x \neq 0, 1$.

d) Nein! Denn: $(x - e^x)' = 1 - e^x \neq xe^x$ für $x \neq 0$.

e) Nein! Denn: $\left(\frac{1}{2}\cos(2x)\right)' = \frac{1}{2}(-\sin(2x)) \cdot 2 = -\sin(2x) \neq \sin(2x)$ für $\sin(2x) \neq 0 \;\Leftrightarrow\; 2x \neq k\pi,\; k \in \mathbb{Z} \;\Leftrightarrow\; x \neq k\frac{\pi}{2},\; k \in \mathbb{Z}$.

Aufgabe 9: Berechnen Sie folgende Integrale mit Hilfe partieller Integration:

$$\text{a)} \int\limits_0^\pi e^x \sin(3x)\,dx\,, \quad \text{b)} \int_0^\pi \sin^4 x\,dx\,,$$
$$\text{c)} \int_{-\pi}^\pi \sin^5 x\,dx\,, \quad \text{d)} \int_0^\pi \sin^2 x \cos^2 x\,dx\,.$$

LÖSUNG:

a) $\int\limits_0^\pi e^x \sin(3x)\,dx = \frac{3}{10}(e^\pi + 1)$. Denn: Partielle Integration mit

$$f(x) = e^x,\; f'(x) = e^x,\; g(x) = \sin(3x),\; g'(x) = 3\cos(3x)$$

ergibt:

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi e^x \sin(3x)\,dx &= e^x \sin(3x)\big|_0^\pi - 3\int_0^\pi e^x \cos(3x)\,dx \\
&= e^\pi \underbrace{\sin(3\pi)}_{=0} - e^0 \underbrace{\sin(3\cdot 0)}_{=\sin(0)=0} - 3\int_0^\pi e^x \cos(3x)\,dx \\
&= -3\int_0^\pi e^x \cos(3x)\,dx \\
&= -3e^x \cos(3x)\big|_0^\pi - 9\int_0^\pi e^x \sin(3x)\,dx \qquad (*) \\
&= -3e^\pi \underbrace{\cos(3\pi)}_{=\cos(\pi)=-1} + 3e^0 \underbrace{\cos(3\cdot 0)}_{=\cos(0)=1} - \\
&\qquad 9\int_0^\pi e^x \sin(3x)\,dx \\
&= 3(e^\pi + 1) - 9\int_0^\pi e^x \sin(3x)\,dx. \\
\Rightarrow\ 10\int_0^\pi e^x \sin(3x)\,dx &= 3(e^\pi+1).\ \Rightarrow\ \text{Beh.!}
\end{aligned}$$

(*) Partielle Integration mit: $f(x) = e^x,\ f'(x) = e^x,\ g(x) = \cos(3x),\ g'(x) = -3\sin(3x)$.

b) $\int_0^\pi \sin^4 x\,dx = \frac{3\pi}{8}$. Denn: Partielle Integration mit

$$f(x) = -\cos x,\ f'(x) = \sin x,\ g(x) = \sin^3 x,\ g'(x) = 3\sin^2 x \cos x$$

ergibt:

$$
\begin{aligned}
\int_0^\pi \sin x \sin^3 x \, dx &= -\cos x \sin^3 x \big|_0^\pi + 3 \int_0^\pi \cos^2 x \sin^2 x \, dx \\
&= 3 \int_0^\pi \cos^2 x \sin^2 x \, dx \qquad (\text{da } \sin 0 = \sin \pi = 0) \\
&= 3 \int_0^\pi (1 - \sin^2 x) \sin^2 x \, dx \qquad (\cos^2 x + \sin^2 x = 1\,!) \\
&= 3 \int_0^\pi \sin^2 x \, dx - 3 \int_0^\pi \sin^4 x \, dx. \\
\Rightarrow \int_0^\pi \sin^4 x \, dx &= \frac{3}{4} \int_0^\pi \sin^2 x \, dx. \\
\int_0^\pi \sin^2 x \, dx &= \int_0^\pi \sin x \sin x \, dx \\
&= -\cos x \sin x \big|_0^\pi + \int_0^\pi \cos^2 x \, dx \\
&= \int_0^\pi \cos^2 x \, dx \quad (-\cos x \sin x \big|_0^\pi = 0, \text{ da } \sin 0 = \sin \pi = 0) \\
&= \int_0^\pi 1 \, dx - \int_0^\pi \sin^2 x \, dx \\
&= \pi - \int_0^\pi \sin^2 x \, dx. \\
\Rightarrow \int_0^\pi \sin^2 x \, dx &= \frac{\pi}{2}, \quad \text{und} \quad \int_0^\pi \sin^4 x \, dx = \frac{3}{4} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{8}.
\end{aligned}
$$

c) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^5 x \; dx = 0$, da $f(x) = \sin^5 x$ ungerade ist: $f(-x) = [\sin(-x)]^5 = [-\sin x]^5 = -\sin^5 x = -f(x)$.

d) Nach b) gilt (Zwischenergebnis dort):

$$\int_0^\pi \sin^2 x \cos^2 x \, dx = \frac{1}{3} \int_0^\pi \sin^4 x \, dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{3\pi}{8} = \frac{\pi}{8}\,.$$

Aufgabe 10: Berechnen Sie die Integrale:

a) $\int_0^\pi \sin x \cos x \, dx$

b) $\int_0^1 \frac{(1-x)^2}{1+x^2} dx$

c) $\int_0^1 x^2 e^x dx$

LÖSUNG:

a)

$$\int_0^\pi \sin x \cos x \, dx = \frac{1}{2} \int_0^\pi \sin 2x \, dx = \frac{1}{2} \left. \frac{-\cos 2x}{2} \right|_0^\pi = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = 0$$

b)

$$\int_0^1 \frac{(1-x)^2}{1+x^2} dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{2x}{1+x^2} \right) dx = \left(x - \ln(1+x^2) \right)\Big|_0^1 = 1 - \ln 2$$

c)

$$\int_0^1 x^2 e^x dx = x^2 e^x\Big|_0^1 - \int_0^1 2x e^x dx = e - \left. (2xe^x) \right|_0^1 + \int_0^1 2e^x dx = e - 2$$

Aufgabe 11: Berechnen Sie mit der Methode zum Integrieren rationaler Funktionen, die in der Vorlesung beschrieben wurde, die Integrale

$$\text{a)} \int \frac{2x-1}{x^2+x-6} \, dx \;, \quad \text{b)} \int \frac{2x-1}{x^2-2x+2} \, dx \,.$$

LÖSUNG:

a) Der Nenner des Integranden lässt sich schreiben als

$$x^2 + x - 6 = (x+3)(x-2).$$

Der Ansatz für die Partialbruchzerlegung sieht also wie folgt aus

$$\frac{2x-1}{(x+3)(x-2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+3}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \; A &= \left(\frac{2x-1}{x+3} - \frac{(x-2)B}{x+3} \right) \Bigg|_{x=2} = \frac{2 \cdot 2 - 1}{2+3} = \frac{3}{5}, \\ B &= \left(\frac{2x-1}{x-2} - \frac{(x+3)A}{x-2} \right) \Bigg|_{x=-3} = \frac{2 \cdot (-3) - 1}{-3-2} = \frac{-7}{-5} = \frac{7}{5}; \end{aligned}$$

also:

$$\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{x-2}+\frac{7}{5}\cdot\frac{1}{x+3}=\frac{3(x+3)+7(x-2)}{5(x-2)(x+3)}=\frac{10x-5}{5(x^2+x-6)}=\frac{2x-1}{x^2+x-6}. \quad \checkmark$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}\int\frac{2x-1}{x^2+x-6}\,dx &= \int\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{x-2}+\frac{7}{5}\cdot\frac{1}{x+3}\,dx\\ &= \frac{3}{5}\log|x-2|+\frac{7}{5}\log|x+3|.\end{aligned}$$

b) Der Nenner lässt sich schreiben als

$$x^2-2x+2=x^2-2x+1+1=(x-1)^2+1.$$

Da die Ableitung des Nenners wie folgt aussieht

$$(x^2-2x+2)'=2x-2,$$

lässt sich das Integral am günstigsten wie folgt umschreiben:

$$\int\frac{2x-1}{x^2-2x+2}\,dx = \int\frac{2x-2}{(x-1)^2+1}\,dx+\int\frac{1}{(x-1)^2+1}\,dx.$$

Da sich

$$\int\frac{2(x-1)}{(x-1)^2+1}\,dx = \int\frac{dz}{z}=\log|z|=\log((x-1)^2+1)$$

mit der Substitution $z=1+(x-1)^2,\ dz=2(x-1)\,dx$ ergibt, und

$$\int\frac{dx}{1+(x-1)^2} = \int\frac{dz}{1+z^2}=\arctan z=\arctan(x-1)$$

mit Hilfe der Substitution $z=x-1,\ dz=dx$ folgt, ergibt sich als Gesamtlösung

$$\int\frac{2x-1}{x^2-2x+2}\,dx=\log((x-1)^2+1)+\arctan(x-1).$$