Aufgabe 12: Berechnen Sie die Taylorentwicklung der Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

um den Punkt $x = 0$ bis zu einem Fehlerterm der Ordnung $O(|y|^6)$.

Aufgabe 13: Zwischen geographischer Breite B und reduzierter Breite β besteht der Zusammenhang

$$\beta = \arctan(\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\tan B),$$

wobei $\varepsilon = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}$ die numerische Exzentrizität des Erdellipsoids mit Halbachsen a und b ist.
Entwickeln Sie die Differenz $\beta - B$ nach ε mit einem Fehlerterm $O(\epsilon^4)$.
Anleitung: Betrachten Sie den Zusammenhang als Verkettung zweier Funktionen

$$\begin{aligned} \beta(w) &= \arctan(w), \\ w(\epsilon) &= \sqrt{1-\varepsilon^2}\, w_0, \\ w_0 &= \tan B = w(0). \end{aligned}$$

- Entwickeln Sie $\beta(w)$ um w_0 bis zum Fehlerterm $O(|w - w_0|^2)$.
- Entwickeln Sie $w(\epsilon)$ um den Punkt 0 bis $O(\epsilon^4)$.
- Setzen die beiden Entwicklungen zusammen, um eine Darstellung von $\beta - B = \beta(w(\epsilon)) - \beta(w_0)$ zu erhalten.

Aufgabe 14:

a) Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Taylor, dass

$$\lim_{h\to 0} \frac{(-f(x_0+2h) + 4f(x_0+h) - 3f(x_0))}{2h} = f'(x_0)$$

gilt, für jede zweimal stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

b) Zeigen Sie, dass mit der Differenzenquotienten - Formel aus a) Polynome vom Grad 2 exakt differenziert werden.

Aufgabe 15: Differenzieren Sie die Funktion $f(x) = x^x = \exp(x \ln x)$ numerisch an der Stelle $x_0 = 3$ mit dem zentralen Differenzenquotienten und dem Vorwärtsdifferenzenquotienten für $h = 10^{-1}$, $h = 10^{-2}$, $h = 10^{-3}$. Vergleichen Sie Ihre numerischen Ergebnisse mit dem exakten Wert $f'(3) = 3^3(\ln 3 + 1)$. Tragen Sie die Fehler für die verschiedenen Werte von h in eine Tabelle ein.