Aufgabe 12: Berechnen Sie die Taylorentwicklung der Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

um den Punkt $x = 0$ bis zu einem Fehlerterm der Ordnung $O(|y|^6)$.

LÖSUNG: Ableitungen der Funktion $f(x)$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{(1-x)^2} \\ f''(x) &= \frac{2}{(1-x)^3} \\ f^{(3)}(x) &= \frac{6}{(1-x)^4} \\ f^{(4)}(x) &= \frac{24}{(1-x)^5} \\ f^{(5)}(x) &= \frac{120}{(1-x)^6} \end{aligned}$$

Taylorentwicklung von $f(y)$ um den Punkt $x = 0$:

$$\begin{aligned} f(y) &= f(0) + f'(0)y + \frac{1}{2}f''(0)y^2 + \frac{1}{6}f^{(3)}(0)y^3 + \frac{1}{24}f^{(4)}(0)y^4 + \frac{1}{120}f^{(5)}(0)y^5 + O(|y|^6) \\ &= 1 + y + y^2 + y^3 + y^4 + y^5 + O(|y|^6) \end{aligned}$$

Aufgabe 13: Zwischen geographischer Breite B und reduzierter Breite β besteht der Zusammenhang

$$\beta = \arctan(\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\tan B),$$

wobei $\varepsilon = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}$ die numerische Exzentrizität des Erdellipsoids mit Halbachsen a und b ist.
Entwickeln Sie die Differenz $\beta - B$ nach ε mit einem Fehlerterm $O(\epsilon^4)$.
Anleitung: Betrachten Sie den Zusammenhang als Verkettung zweier Funktionen

$$\begin{aligned} \beta(w) &= \arctan(w), \\ w(\epsilon) &= \sqrt{1-\varepsilon^2}\, w_0, \\ w_0 &= \tan B = w(0). \end{aligned}$$

- Entwickeln Sie $\beta(w)$ um w_0 bis zum Fehlerterm $O(|w - w_0|^2)$.
- Entwickeln Sie $w(\epsilon)$ um den Punkt 0 bis $O(\epsilon^4)$.
- Setzen die beiden Entwicklungen zusammen, um eine Darstellung von $\beta - B = \beta(w(\epsilon)) - \beta(w_0)$ zu erhalten.

LÖSUNG:

$$\frac{d}{dx}\arctan x = \frac{1}{1+x^2}$$

Entwickeln wir die Funktion $\beta(w)$ um w_0 so erhalten wir also

$$\beta(w) = \arctan w = \arctan w_0 + \frac{1}{1+w_0^2}(w-w_0) + O\left(|w-w_0|^2\right)$$

Nun betrachten wir $w(\epsilon) = \sqrt{1-\epsilon^2}w_0$.

$$\begin{aligned}
w'(\epsilon) &= -\frac{\epsilon}{\sqrt{1-\epsilon^2}}w_0 \\
w''(\epsilon) &= -\frac{1}{(1-\epsilon^2)^{\frac{3}{2}}}w_0 \\
w'''(\epsilon) &= -\frac{3\epsilon}{(1-\epsilon^2)^{\frac{5}{2}}}w_0
\end{aligned}$$

$$w(\epsilon) = w_0 - \frac{\epsilon^2}{2}w_0 + O(\epsilon^4)$$

Nun ist

$$\begin{aligned}
\beta - B = \beta(w(\epsilon)) - \beta(w_0) &= \arctan w(\epsilon) - \arctan w_0 \\
&= \frac{w(\epsilon)-w_0}{1+w_0^2} + O(|w(\epsilon)-w_0|^2), \\
w(\epsilon) - w_0 &= -\frac{\epsilon^2}{2}w_0 + O(\epsilon^4) \\
&= -\frac{\epsilon^2}{2}\tan B + O(\epsilon^4)
\end{aligned}$$

Insbesondere ist $w(\epsilon) - w_0 = O(\epsilon^2)$.

Die Entwicklung der Differenz $\beta - B$ nach Potenzen von ε mit einem Fehlerterm $O(\epsilon^4)$ sieht also wie folgt aus

$$\begin{aligned}
\beta - B &= \frac{-\frac{\epsilon^2}{2}\tan B + O(\epsilon^4)}{1+\tan^2 B} + \underbrace{O\left(|w(\epsilon)-w_0|^2\right)}_{=O((\epsilon^2)^2)} \\
&= \left(-\frac{\epsilon^2}{2}\right)\frac{\tan B}{1+\tan^2 B} + O(\epsilon^4).
\end{aligned}$$

Aufgabe 14: a) Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Taylor, dass

$$\lim_{h\to 0}\frac{(-f(x_0+2h) + 4f(x_0+h) - 3f(x_0))}{2h} = f'(x_0)$$

gilt, für jede zweimal stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

b) Zeigen Sie, dass mit der Differenzenquotienten - Formel aus a) Polynome vom Grad 2 exakt differenziert werden.

LÖSUNG:

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei 2-mal stetig differenzierbar.
Taylor ergibt:

$$\begin{aligned} f(x_0+h) &= f(x_0) + f'(x_0)\cdot h + O(h^2) \\ f(x_0+2h) &= f(x_0) + f'(x_0)\cdot 2h + O(h^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & (-f(x_0+2h) + 4f(x_0+h) - 3f(x_0)) \\ = \quad & \underbrace{(-f(x_0) + 4f(x_0) - 3f(x_0))}_{=0} + (-f'(x_0) + 2f'(x_0))\cdot 2h + O(h^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & \frac{-f(x_0+2h) + 4f(x_0+h) - 3f(x_0)}{2h} = f'(x_0) + O(h) \\ \Rightarrow \quad & \text{Beh.!} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} p(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \quad \in \mathcal{P}_2 \\ p(x_0+h) &= a_0 + a_1(x_0+h) + a_2(x_0+h)^2 \\ &= a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + a_1 h + a_2 2 x_0 h + a_2 h^2 \\ &= p(x_0) + (a_1 + 2a_2 x_0)h + a_2 h^2 \\ p(x_0+2h) &= a_0 + a_1(x_0+2h) + a_2(x_0+2h)^2 \\ &= p(x_0) + (a_1 + 2a_2 x_0)2h + a_2 4h^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & \frac{-p(x_0+2h) + 4p(x_0+h) - 3p(x_0)}{2h} \\ = \quad & \frac{1}{2h}\underbrace{(-p(x_0) + 4p(x_0) - 3p(x_0))}_{=0} \\ & + \frac{1}{2h}\left(-(a_1 + 2a_2 x_0)2h + 2(a_1 + 2a_2 x_0)2h\right) \\ & + \frac{1}{2h}\underbrace{(-4a_2 h^2 + 4a_2 h^2)}_{=0} \\ = \quad & a_1 + 2a_2 x_0 = p'(x_0) \quad \checkmark \end{aligned}$$

Aufgabe 15: Differenzieren Sie die Funktion $f(x) = x^x = \exp(x \ln x)$ numerisch an der Stelle $x_0 = 3$ mit dem zentralen Differenzenquotienten und dem Vorwärtsdifferenzenquotienten für $h = 10^{-1}$, $h = 10^{-2}$, $h = 10^{-3}$. Vergleichen Sie Ihre numerischen Ergebnisse mit dem exakten Wert $f'(3) = 3^3(\ln 3 + 1)$. Tragen Sie die Fehler für die verschiedenen Werte von h in eine Tabelle ein.

LÖSUNG:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^x = e^{x\ln x} \\ x_0 &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(3) &= 3^3 = 3\cdot 3\cdot 3 = 27 \\ f'(x) &= \left(e^{x\ln x}\right)' \\ &= e^{x\ln x}\cdot\left\{1\cdot\ln x + x\cdot\frac{1}{x}\right\} \\ &= x^x\cdot(\ln x + 1) \\ f'(3) &= 3^3\cdot(\ln 3 + 1) \\ &= 27\cdot(1+\ln 3) \\ &= 27 + 27\cdot\ln 3 \\ &\approx 27(1+1{,}098612289) \\ &\approx 56{,}66253179 \quad \text{(Taschenrechner)} \end{aligned}$$

Zentraler Differenzenquotient:

$$ZD_f(x_0,h) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$$

$$h = 10^{-1} = \frac{1}{10},\; h = 10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100},\; h = 10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000}$$

$$\begin{aligned} h = \frac{1}{10}:\; ZD_f(3,\frac{1}{10}) &= \frac{f(3{,}1)-f(2{,}9)}{1/5} \\ &= 5\cdot\left((3{,}1)^{3{,}1}-(2{,}9)^{2{,}9}\right) \\ &\approx 5\cdot(33{,}35963198 - 21{,}92573667) \\ &\approx 5\cdot 11{,}43389531 \\ &\approx 57{,}16947654 \\ |\mathit{Fehler}| &\approx 57{,}16947654 - 56{,}66253179 \approx 0{,}50694475 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h = \frac{1}{100}:\; ZD_f(3,\frac{1}{100}) &= 50\cdot\left((3{,}01)^{3{,}01}-(2{,}99)^{2{,}99}\right) \\ &\approx 50\cdot(27{,}5730718 - 26{,}43972009) \\ &\approx 50\cdot 1{,}13335171 \\ &\approx 56{,}66758548 \\ |\mathit{Fehler}| &\approx 56{,}66758548 - 56{,}66253179 \approx 0{,}005053685 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h = \frac{1}{1000}:\ ZD_f(3, \frac{1}{1000}) &= 500 \cdot \big((3{,}001)^{3{,}001} - (2{,}999)^{2{,}999}\big) \\ &\approx 500 \cdot (27{,}05672654 - 26{,}94340137) \\ &\approx 500 \cdot 0{,}113325166 \\ &\approx 56{,}66258295 \\ |Fehler| &\approx 56{,}66258295 - 56{,}66253179 \approx 0{,}00005116 \end{aligned}$$

Vorwärtsdifferenzenquotient:

$$VD_f(x_0, h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$$\begin{aligned} h = \frac{1}{10}:\ VD_f(3, \frac{1}{10}) &\approx 63{,}59631979 \\ |Fehler| &\approx 6{,}933787997 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h = \frac{1}{100}:\ VD_f(3, \frac{1}{100}) &\approx 57{,}30718008 \\ |Fehler| &\approx 0{,}64464829 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h = \frac{1}{1000}:\ VD_f(3, \frac{1}{1000}) &\approx 56{,}7265386 \\ |Fehler| &\approx 0{,}06400681 \end{aligned}$$

h	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$
$ZD_f(3,h)$	0,507	0,00505	0,0000512
$VD_f(3,h)$	6,93	0,645	0,0640

Man sieht gut die unterschiedliche Approximationsordnung: Beim Vorwärts-Differenzenquotienten wird der Fehler um den Faktor 10 kleiner, wenn man h durch 10 teilt (Ordnung $O(h)$). Beim zentralen Differenzenquotienten wird der Fehler bei der Zehntelung von h um den Faktor 100 kleiner (Ordnung $O(h^2)$).