Aufgabe 16: Betrachten Sie die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{1+25x^2}, \qquad x \in [-1,1].$$

a) Bestimmen Sie die Interpolationspolynome vom Grad m

$$p_m(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

bzgl. $f(x)$ für $m = 4, 8, 16$ mit den Stützstellen

$$x_i = \frac{2 \cdot i}{m} - 1, \quad i = 0, \ldots, m.$$

Nutzen Sie zum aufstellen und lösen des Gleichungssystems Matlab. Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen $f(x)$ und $p_m(x)$.

b) Bestimmen Sie die stückweise affine Interpolation $s_m(x)$ bzgl. $f(x)$ mit den Stützstellen

$$x_i = \frac{2 \cdot i}{m} - 1, \quad i = 0, \ldots, m.$$

für $m = 4, 8, 16$ mittels Matlab. Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen $f(x)$ und $s_m(x)$.

c) Vergleichen Sie die Ergebnisse der beiden Verfahren.

Aufgabe 17: Betrachten Sie die Kurve

$$\gamma : [0,4] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{2}t) \\ \sin(\frac{\pi}{2}t) \end{pmatrix}.$$

Interpolieren Sie die beiden Funktionen $\gamma_1(t)$ und $\gamma_2(t)$ durch Polynome p_1 und p_2 mit den Stützstellen 0, 1, 2, 3 und 4.
Nun definieren wir die Kurve

$$p : [0,4] \to \mathbb{R}^2, \quad p(t) = \begin{pmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \end{pmatrix}.$$

In welchen Punkten schneiden sich die beiden Kurven γ und p?
Ist p eine geschlossene Kurve?

Aufgabe 18: Zeichnen Sie die beiden Kurven

$$\gamma : [0,4] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{2}t) \\ \sin(\frac{\pi}{2}t) \end{pmatrix}$$

und

$$p : [0,4] \to \mathbb{R}^2, \quad p(t) = \begin{pmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6}t^4 + \frac{4}{3}t^3 - \frac{17}{6}t^2 + \frac{2}{3}t + 1 \\ \frac{1}{3}(t^3 - 6t^2 + 8t) \end{pmatrix}$$

mit MATLAB.

Aufgabe 19: Interpolieren Sie die Funktion

$$f(x,y) = \sin(\pi x)\sin(\pi y)$$

auf $[0,1]^2$ mittels bikubischer Polynome ($m = 2$, $n = 3$). Wählen Sie dazu geeignete Knoten und berechnen Sie nur die Lagrangepolynome, die Sie tatsächlich benötigen.

Aufgabe 20: Gegeben sei ein Dreieck mit den Eckpunkten $a_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $a_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$ und $a_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie die baryzentrischen Koordinaten der Punkte $p_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4{,}6 \end{pmatrix}$ und $p_2 = \begin{pmatrix} 3{,}7 \\ 2{,}1 \end{pmatrix}$ bezüglich dieses Dreiecks. Liegen p_1 bzw. p_2 im Innern dieses Dreiecks?