Aufgabe 21: Berechnen Sie $\int_0^1 (x^3+3x^2-x+1)\,dx$ einmal direkt und einmal numerisch mit Hilfe der Kepler'schen Fassregel

$$K_f := \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right) \; ,$$

wobei $a = 0$, $b = 1$ und $f(x) = x^3 + 3x^2 - x + 1$ ist.

Lösung:

i)

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (x^3 + 3x^2 - x + 1)\,dx &= \frac{1}{4}x^4 + x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x\Big|_0^1 \\
&= \frac{1}{4} + 1 - \frac{1}{2} + 1 \\
&= 2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4} = 1{,}75
\end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^3 + 3x^2 - x + 1 \\
f(0) &= 1 \\
f(1) &= 1 + 3 - 1 + 1 = 4 \\
f(1/2) &= \frac{1}{8} + \frac{3}{4} - \frac{1}{2} + 1 = 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{11}{8}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow\; K_f &= \frac{1}{6}\left(f(0) + 4f(1/2) + f(1)\right) \\
&= \frac{1}{6}\left(1 + 4\cdot\frac{11}{8} + 4\right) \\
&= \frac{1}{6}\left(1 + \frac{11}{2} + 4\right) = \frac{1}{6}\cdot\frac{21}{2} = \frac{3\cdot 7}{2\cdot 2\cdot 3} = \frac{7}{4} = 1{,}75
\end{aligned}$$

Also gilt:

$$1{,}75 = K_f = \int_0^1 f(x)\,dx, \;\; f(x) = x^3 + 3x^2 - x + 1\,.$$

Dies ist <u>kein</u> Zufall: Es gilt allgemein:
Die Kepler'sche Fassregel integriert Polynome $p \in \mathcal{P}_3$ exakt.

Aufgabe 22: Gegeben sei die Funktion

$$f : [-1, 1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

sowie die Knoten $x_0 = -1$, $x_1 = 0$ und $x_2 = 1$.

a) Berechnen Sie die Lagrange-Basis zu den oben angegebenen Knoten.

b) Berechnen Sie die Lagrange-Interpolation der Funktion $f(x)$ zu diesen Knoten.

c) Geben Sie die Quadraturformel (numerische Integrationsformel) zur Approximation eines Integrals von -1 bis 1 mit den Knoten $x_0 = -1$, $x_1 = 0$ und $x_2 = 1$ an.

d) Wenden Sie die Quadraturformel zur näherungsweisen Berechnung des Integrals

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$$

an.

e) Welche geometrische Figur beschreibt der Graph der Funktion f?

f) Geben Sie den exakten Wert des Integrals

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$$

an. (ohne Rechnung)

LÖSUNG:

a)

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\frac{x - x_2}{x_0 - x_2} = \frac{x}{-1}\frac{x - 1}{-1 - 1} = \frac{1}{2}x(x - 1)$$
$$L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\frac{x - x_2}{x_1 - x_2} = \frac{x + 1}{1}\frac{x - 1}{-1} = -(x + 1)(x - 1)$$
$$L_2(x) = \frac{x - x_0}{x_2 - x_0}\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{x + 1}{1 + 1}\frac{x - 0}{1 - 0} = \frac{1}{2}x(x + 1)$$

b)

$$p(x) = f(-1)L_0(x) + f(0)L_1(x) + f(1)L_2(x) = L_1(x) = -(x+1)(x-1) = -x^2 + 1$$

c)

$$w_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} L_0(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{1}{2}(x^2 - x)\,dx = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{6}$$
$$w_1 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} L_1(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} 1 - x^2\,dx = \frac{1}{2}\left[x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3}\right] = \frac{2}{3}$$
$$w_2 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} L_2(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{1}{2}(x^2 + x)\,dx = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{6}$$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx 2\left(\frac{1}{6}f(x_0) + \frac{2}{3}f(x_1) + \frac{1}{6}f(x_2)\right)$$

d)

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx 2\left(\frac{1}{6}0 + \frac{2}{3}1 + \frac{1}{6}0\right) = \frac{4}{3} \approx 1.33$$

e) Oberer Halbkreis.

f) $\frac{1}{2}\pi r^2 = \frac{1}{2}\pi \approx 1.57$

Aufgabe 23: Betrachten Sie die Funktion $f : [-1; 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 - 1)^2$.

a) Berechnen Sie das Integral

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx.$$

b) Betrachten Sie die Quadraturformel mit vier gleichmäßig verteilten Knoten ($n = 3$) auf dem Intervall $[-1; 1]$, d.h.

$$x_0 = -1, \quad x_1 = -\frac{1}{3}, \quad x_2 = \frac{1}{3}, \quad x_3 = 1.$$

Berechnen Sie die zugehörigen Gewichte.

Verwenden Sie die Quadraturformel zur Approximation des Integrals aus Teil a).

c) Betrachten Sie die Gauß-Quadratur mit drei Knoten auf dem Intervall $[-1; 1]$.

Berechnen Sie das Legendre-Polynom dritten Grades

$$P_3(x) = \frac{3!}{6!}\frac{d^3}{dx^3}(x^2 - 1)^3.$$

Berechnen Sie die Nullstellen von P_3 – d.h. die Knoten der Gauß-Quadratur, und die zugehörigen Gewichte.

Verwenden Sie die Quadraturformel zur Approximation des Integrals aus Teil a).

LÖSUNG:

a) Zur Berechnung des Integrals betrachten wir die Monome der Funcktion $f(x)$, d.h. $f(x) = (x^4 - 2x^2 + 1)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} f(x)\,dx &= \int_{-1}^{1} (x^2-1)^2\,dx = \int_{-1}^{1} (x^4 - 2x^2 + 1)\,dx \\ &= \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + x\right]_{-1}^{1} = [(\frac{1}{5} - \frac{2}{3} + 1) + (\frac{1}{5} - \frac{2}{3} + 1)] \\ &= \frac{2}{5} - \frac{4}{3} + 2 = \frac{1}{15}(6 - 20 + 30) = \frac{16}{15}.\end{aligned}$$

b) Zunächst berechnen wir die Lagrange-Funcktion L_0. Hier gilt

$$\begin{aligned}L_0(x) &= \frac{x+\frac{1}{3}}{-1+\frac{1}{3}}\frac{x-\frac{1}{3}}{-1-\frac{1}{3}}\frac{x-1}{-1-1} \\ &= \frac{x^3 - x^2 - \frac{1}{9}x + \frac{1}{9}}{-\frac{16}{9}} = -\frac{9}{16}x^3 + \frac{9}{16}x^2 + \frac{1}{16}x - \frac{1}{16}\end{aligned}$$

und somit

$$\omega_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} L_0(x)\,dx = \frac{1}{8}.$$

Da das Gewicht unabhängig vom konkreten Intervall ist, kann man sich mit den Knoten $0, 1, 2, 3$ auf dem Intervall $[0; 3]$ die Rechnung deutlich vereinfachen.

Aufgrund der Symmetrie gilt $\omega_3 = \frac{1}{8}$, also $\omega_1 + \omega_2 = \frac{6}{8}$. Wieder aufgrund der Symmetrie erhalten wir $\omega_1 = \omega_2 = \frac{3}{8}$.

Setzen wir dies ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} f(x)\,dx &\approx (b-a)\cdot\sum_{i=0}^{3} w_i \cdot f(x_i) \\ &= 2\cdot(\frac{1}{8}\cdot 0 + \frac{3}{8}\cdot\frac{64}{81} + \frac{3}{8}\cdot\frac{64}{81} + \frac{1}{8}\cdot 0) = \frac{96}{81} = \frac{32}{27} \neq \frac{16}{15}.\end{aligned}$$

c) Das Legendre-Polynom dritten Grades lautet

$$P_3(x) = x^3 - \frac{3}{5}x.$$

Die Nullstellen der Funktion sind die Quadratur-Punkte, d.h.

$$x_0 = -\sqrt{\frac{3}{5}}, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = \sqrt{\frac{3}{5}}.$$

Dann gilt

$$
\begin{aligned}
L_1(x) &= \frac{x-\sqrt{\frac{3}{5}}}{0-\sqrt{\frac{3}{5}}}\frac{x+\sqrt{\frac{3}{5}}}{0+\sqrt{\frac{3}{5}}} \\
&= \frac{x^2-\frac{3}{5}}{-\frac{3}{5}} = -\frac{5}{3}x^2+1
\end{aligned}
$$

und somit

$$\omega_1 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} L_1(x)\,dx = \frac{4}{9}.$$

Aufgrund der Addition zur Eins Eigenschaft, d.h. $\omega_0+\omega_1+\omega_2 = 1$ und der Symmetrie, d.h. $\omega_0 = \omega_2$, erhalten wir $\omega_0 = \omega_2 = \frac{5}{18}$.

Somit gilt

$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} f(x)\,dx &\approx (b-a)\cdot\sum_{i=0}^{2} w_i\cdot f(x_i) \\
&= 2\cdot(\frac{5}{18}\cdot\frac{4}{25}+\frac{4}{9}\cdot 1+\frac{5}{18}\cdot\frac{4}{25}) = \frac{2}{9}\frac{4}{5}+\frac{8}{9} = \frac{8+8\cdot 5}{45} = \frac{48}{45} = \frac{16}{15}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 24: Lösen Sie die folgenden Gleichungen in $\mathbb{C}$. Geben Sie die Lösungen in der Form $z = x+iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ an.

a) $z^3 = -8$

b) $z^2 = i$

c) $z^4 = -16$

d) $z = \frac{2+i}{2-i}$

Achtung: Berechnen Sie alle Lösungen!

LÖSUNG:

a) $z^3 = -8$ hat 3 Lösungen.

$$
\begin{array}{llllll}
z^3 = -8 = 8e^{i\pi} & & & = 8e^{3i\pi} & & = 8e^{5i\pi} \\
\Leftrightarrow & z = 2e^{i\frac{\pi}{3}} & \text{oder} & z = 2e^{3i\frac{\pi}{3}} & \text{oder} & z = 2e^{5i\frac{\pi}{3}} \\
\Leftrightarrow & z = 2e^{i\frac{\pi}{3}} & \text{oder} & z = 2e^{i\pi} & \text{oder} & z = 2e^{-i\frac{\pi}{3}} \\
\Leftrightarrow & z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right) & \text{oder} & z = -2 & \text{oder} & z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right) \\
\Leftrightarrow & z = 2\left(\frac{1}{2}+i\sqrt{\frac{3}{4}}\right) & \text{oder} & z = -2 & \text{oder} & z = 2\left(\frac{1}{2}-i\sqrt{\frac{3}{4}}\right) \\
\Leftrightarrow & z = 1+i\sqrt{3} & \text{oder} & z = -2 & \text{oder} & z = 1-i\sqrt{3}
\end{array}
$$

Alternativ: 1. Lösung ist klar: $\boxed{z_1 = -2}$: $(-2)^3 = -8$ ✓ Polynomdivision:

$$\begin{array}{rrrrrrl}
(z^3 & + & 8) & : & (z+2) & = & z^2-2z+4 \\
-(z^3 & + & 2z^2) & & & & \\
\hline
-2z^2 & + & 8 & & & & \\
-(-2z^2 & - & 4z) & & & & \\
\hline
 & & 4z & + & 8 & & \\
 & & -(4z & + & 8) & & \\
\hline
 & & & & 0 & &
\end{array}$$

Probe: $(z^2-2z+4)(z+2) = z^3 - 2z^2 + 4z + 2z^2 - 4z + 8 = z^3 + 8$ ✓

Berechnung der 2. und 3. Lösung:

$$\begin{aligned}
z^2 - 2z + 4 = 0 &\Leftrightarrow z^2 - 2z + 1 + 3 = 0 \\
&\Leftrightarrow (z-1)^2 + 3 = 0 \\
&\Leftrightarrow (z-1)^2 - 3i^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow (z-1)^2 - \left(\sqrt{3}i\right)^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \left(z - 1 - i\sqrt{3}\right)\left(z - 1 + i\sqrt{3}\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \boxed{z_2 = 1 + i\sqrt{3}},\ \boxed{z_3 = 1 - i\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

Probe:

$$\begin{aligned}
\left(1+i\sqrt{3}\right)^3 &= \left(1+i\sqrt{3}\right)^2\left(1+i\sqrt{3}\right) \\
&= \left(1+2\sqrt{3}i-3\right)\left(1+i\sqrt{3}\right) \\
&= \left(-2+2\sqrt{3}i\right)\left(1+i\sqrt{3}\right) \\
&= (-2)\left(1-\sqrt{3}i\right)\left(1+i\sqrt{3}\right) \\
&= (-2)\left(1-i^2\cdot 3\right) = (-2)(1+3) \\
&= -8 \quad ✓ \\
\left(1-i\sqrt{3}\right)^3 &= \left(1-i\sqrt{3}\right)^2\left(1-i\sqrt{3}\right) \\
&= \left(-2-2\sqrt{3}i\right)\left(1-i\sqrt{3}\right) \\
&= (-2)\left(1+i\sqrt{3}\right)\left(1-i\sqrt{3}\right) \\
&= (-2)(1+3) \\
&= -8 \quad ✓
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
z^2 = i &\Leftrightarrow z^2 = e^{i\frac{\pi}{2}} \\
&\Leftrightarrow z = \pm e^{i\frac{\pi}{4}} \\
&\Leftrightarrow z = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)
\end{aligned}$$

c) $z^4 = -16$ hat 4 Lösungen:

Um die Gleichung $z^4 = -16$ zu lösen definieren wir $y := z^2$, so dass die erste Gleichung äquivalent ist zu $y^2 = -16$. Nun lösen wir als erstes die Gleichung $y^2 = -16$ nach y auf.

$$y^2 = -16 \quad \Leftrightarrow \quad y = \pm 4i$$

Also müssen wir noch die zwei Gleichungen $z^2 = 4i$ und $z^2 = -4i$ lösen und nutzen dafür das Ergebnis aus dem vorherigen Aufgabenteil.

$$\begin{aligned} z^2 = 4i \quad &\Leftrightarrow \quad \left(\frac{z}{2}\right)^2 = i \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{z}{2} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) \\ &\Leftrightarrow \quad z = \pm\sqrt{2}(1+i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z^2 = -4i \quad &\Leftrightarrow \quad -\frac{z^2}{4} = i \\ &\Leftrightarrow \quad \left(\frac{zi}{2}\right)^2 = i \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{zi}{2} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) \\ &\Leftrightarrow \quad zi = \pm\sqrt{2}(1+i) \\ &\Leftrightarrow \quad z = \pm\sqrt{2}i(1+i) = \pm\sqrt{2}(i-1) \end{aligned}$$

Die vier Lösungen sind also

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt{2}(1+i) \\ z_2 &= -\sqrt{2}(1+i) \\ z_3 &= \sqrt{2}(1-i) \\ z_4 &= \sqrt{2}(i-1) \end{aligned}$$

d) Mittels der Berechnung des multiplikativen Inversen:

$$\begin{aligned} (2-i)^{-1} &= \frac{1}{2^2+1^2}(2+i) = \frac{1}{5}(2+i) \\ (2+1)(2-i)^{-1} &= \frac{1}{5}(2+i)(2+i) = \frac{1}{5}(4+4i-1) = \frac{3}{5}+\frac{4}{5}i \end{aligned}$$

Alternativ:

$$\begin{aligned} \frac{2+i}{2-i} &= \frac{(2+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{4+4i-1}{4-i^2} = \frac{3+4i}{5} \\ &= \frac{3}{5}+\frac{4}{5}i\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 25: Berechnen Sie die Lösungen der folgenden quadratischen Gleichungen in $\mathbb{C}$. Geben Sie beide Lösungen in der Form $x = a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an.

a) $x^2 + (1-3i)x - 2 - 2i = 0$

b) $x^2 + 2\sqrt{2}x - 2\sqrt{3}i = 0$

Tipp: $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$, $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

LÖSUNG: Verwende die p-q-Formel:

a)

$$\begin{aligned}
x_{1,2} &= -\frac{1-3i}{2} \pm \sqrt{\frac{(1-3i)^2}{4} + 2 + 2i} \\
&= -\frac{1-3i}{2} \pm \frac{\sqrt{1-6i-9+8+8i}}{2} \\
&= -\frac{1-3i}{2} \pm \frac{\sqrt{2}\sqrt{i}}{2} \\
&= -\frac{1-3i}{2} \pm \frac{1+i}{2}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow x_1 = 2i, \quad x_2 = -1 + i$

Dabei ist $\sqrt{i} = \sqrt{e^{i\frac{\pi}{2}}} = e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$.

b)

$$\begin{aligned}
x_{1,2} &= -\frac{2\sqrt{2}}{2} \pm \sqrt{2 + 2\sqrt{3}i} \\
&= -\sqrt{2} \pm \sqrt{4}\sqrt{\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)} \\
&= -\sqrt{2} \pm 2\sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)i} \\
&= -\sqrt{2} \pm 2\sqrt{e^{i\frac{\pi}{3}}} \\
&= -\sqrt{2} \pm 2e^{i\frac{\pi}{6}} \\
&= -\sqrt{2} \pm 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)i\right) \\
&= -\sqrt{2} \pm 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) \\
&= -\sqrt{2} \pm \left(\sqrt{3} + i\right)
\end{aligned}$$

$\Rightarrow x_1 = -\sqrt{2} + \sqrt{3} + i, \quad x_2 = -\sqrt{2} - \sqrt{3} - i$

Um sich die Winkel zu überlegen, ist eine Skizze hilfreich.