Aufgabe 26: Berechnen Sie die Eigenwerte und die Eigenvektoren von

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -3/4 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} .$$

Finden Sie einen Zusammenhang zwischen den Eigenwerten und Eigenvektoren von $\mathbf{A}$ und $\mathbf{A}^{-1}$.

Lösung: (I) Bestimmung der Eigenwerte von $\mathbf{A}$:

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbb{1}) &= \det \begin{pmatrix} -\lambda & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{pmatrix} \\ &= -\lambda(3-\lambda) - 4 \\ &= \lambda^2 - 3\lambda - 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda^2 - 3\lambda - 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(\lambda - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} - 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow \qquad \lambda &= \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} \\ &= \frac{3}{2} \pm \frac{5}{2} \end{aligned}$$

Also sind $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 4$ die Eigenwerte von $\mathbf{A}$.
(II) **Bestimmung der zugehörigen Eigenvektoren:**
a) Für $\lambda_1 = -1$ gilt:

$$\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I} = \mathbf{A} + \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} .$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow x + 2y = 0 \quad \text{mit} \quad y = 1 \Rightarrow x = -2y = -2 .$$

Also ist $\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ die Menge aller Eigenvektoren zu $\lambda_1 = -1$ von $\mathbf{A}$.

$$\text{Probe:} \ \mathbf{A} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = (-1) \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

b) Für $\lambda_2 = 4$ gilt:

$$\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{I} = \mathbf{A} - 4\mathbf{I} = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} .$$

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow -4x + 2y = 0 \Leftrightarrow -2x + y = 0 \quad \text{mit} \quad x = 1 \Rightarrow y = 2\,.$$

Also ist span $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ die Menge aller Eigenvektoren zu $\lambda_2 = 4$ von $\mathbf{A}$.

$$\text{Probe:}\ \ \mathbf{A}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\,.$$

(III) Es sei

$$\mathbf{B} := \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Die charakteristische Gleichung von $\mathbf{B}$ lautet: $\lambda^2 + \frac{3}{4}\lambda - \frac{1}{4} = 0$ (siehe (I)!).

$$\Leftrightarrow (\lambda + 1)(\lambda - \frac{1}{4}) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = \frac{1}{4}\,.$$

Offensichtlich gilt: $\lambda_1^B = \frac{1}{\lambda_1^A}$ und $\lambda_2^B = \frac{1}{\lambda_2^A}$ ($-1 = -1$ und $\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$).
Fazit: Die Eigenwerte von $\mathbf{A}^{-1}$ sind die Kehrwerte der Eigenwerte von $\mathbf{A}$!
Bestimmung der zugehörigen Eigenvektoren:
a) Für $\lambda_1 = -1$ gilt:

$$\mathbf{B} + \mathbf{I} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}\,.$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}x + y = 0 \quad \text{mit} \quad y = 1 \Rightarrow x = -2.$$

Also ist span $\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ auch die Menge aller Eigenvektoren zu $\lambda_1 = -1$ von $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$.
b) Für $\lambda_2 = \frac{1}{4}$ gilt:

$$\mathbf{B} - \frac{1}{4}\mathbf{I} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}\,.$$

$$\begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow -x + \frac{1}{2}y = 0 \quad \text{mit} \quad x = 1 \Rightarrow y = 2\,.$$

Also ist span $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ auch die Menge aller Eigenvektoren zu $\lambda_2 = \frac{1}{4}$ von $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$.
Fazit: Die Eigenwerte von $\mathbf{A}^{-1}$ sind die Kehrwerte der Eigenwerte von $\mathbf{A}$ und die zugehörigen Eigenvektoren sind gleich. D.h. wenn λ_1 ein Eigenwert von $\mathbf{A}$ ist und $\frac{1}{\lambda_1}$ folglich ein Eigenwert von $\mathbf{A}^{-1}$, so sind die Eigenvektoren der beiden Matrizen zu diesen Eigenwerten gleich.

Aufgabe 27: Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Diagonalisieren Sie A, d.h. berechnen Sie eine orthogonal Matrix U und eine Diagonalmatrix D, so dass $A = UDU^T$. Berechnen Sie die Spur und die Determinante von A und D.

LÖSUNG: Da A eine symmetrische Matrix ist, hat die zu A gehörende Diagonalmatrix auf der Diagonalen genau die Eigenwerte von A. Diese bestimmen wir mit dem charakteristischen Polynom:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (1-\lambda)(3-\lambda)^2 - (1-\lambda) \\ &= (1-\lambda)(9 - 6\lambda + \lambda^2 - 1) \\ &= (1-\lambda)(\lambda^2 - 6\lambda + 8) \\ &= (1-\lambda)(\lambda-2)(\lambda-4) = 0 \end{aligned}$$

Also ist die zu A gehörende Diagonalmatrix $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Eigenvektoren der Matrix A:

Menge der Eigenvektoren zum Eigenwert 1: $\left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, \alpha \in \mathbb{R} \right\}$

Der normierte Eigenvektor lautet also: $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Menge der Eigenvektoren zum Eigenwert 2: $\left\{ \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \,\middle|\, \alpha \in \mathbb{R} \right\}$

Der normierte Eigenvektor lautet also: $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

Menge der Eigenvektoren zum Eigenwert 4: $\left\{ \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, \alpha \in \mathbb{R} \right\}$

Der normierte Eigenvektor lautet also: $u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

Da A drei voneinander verschiedene Eigenwerte hat, sind die Eigenräume orthogonal und wir erhalten

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad U^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Daher gilt:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = UDU^T.$$

Des Weiteren gilt für die Determinant und Spur von A und D:

$$\det \mathbf{A} = 1 \cdot 3 \cdot 3 + 0 + 0 - 0 - 1 \cdot 1 \cdot 1 - 0 = 8$$

$$\det \mathbf{D} = 1 \cdot 2 \cdot 4 = 8 = \det \mathbf{A}$$

$$\operatorname{tr} \mathbf{A} = 1 + 3 + 3 = 7$$

$$\operatorname{tr} \mathbf{D} = 1 + 2 + 4 = 7 = \operatorname{tr} \mathbf{A}$$

Aufgabe 28: Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

und $B = A - 4\mathbb{1}$.

LÖSUNG:

$$\begin{aligned} P_1(\lambda) = \det(A - \lambda\mathbb{1}) &= \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (1-\lambda)^2(3-\lambda) + 1 + 1 - (1-\lambda) - (1-\lambda) - (3-\lambda) \\ &= (1 - 2\lambda + \lambda^2)(3-\lambda) - 3 + 3\lambda \\ &= 3 - 7\lambda + 5\lambda^2 - \lambda^3 - 3 + 3\lambda \\ &= -4\lambda + 5\lambda^2 - \lambda^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & P_1(\lambda) &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad & -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 4\lambda &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad & -\lambda\,(\lambda^2 - 5\lambda + 4) &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad & -\lambda\left[\left(\lambda - \tfrac{5}{2}\right)^2 - \tfrac{9}{4}\right] &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \lambda &= 0 \text{ oder } \tfrac{5}{2} - \sqrt{\tfrac{9}{4}} \text{ oder } \tfrac{5}{2} + \sqrt{\tfrac{9}{4}} \\ \Leftrightarrow \quad & \lambda &= 0 \text{ oder } 1 \text{ oder } 4 \end{aligned}$$

Die Eigenwerte der Matrix A lauten also $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ und $\lambda_3 = 4$.

Nun berechnen wir die Eigenwerte der Matrix $B = A - 4\mathbb{1}$:

$$\begin{aligned}
P_2(\lambda) = \det(B - \lambda\mathbb{1}) &= \det\begin{pmatrix} -3-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & -3-\lambda & 1 \\ -1 & 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} \\
&= (-3-\lambda)^2(-1-\lambda) + 1 + 1 - (-3-\lambda) - (-3-\lambda) - (-1-\lambda) \\
&= \left(9 + 6\lambda + \lambda^2\right)(-1-\lambda) + 9 + 3\lambda \\
&= -9 - 6\lambda - \lambda^2 - 9\lambda - 6\lambda^2 - \lambda^3 + 9 + 3\lambda \\
&= -12\lambda - 7\lambda^2 - \lambda^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& & P_2(\lambda) &= 0 \\
&\Leftrightarrow & -\lambda\left(\lambda^2 + 7\lambda + 12\right) &= 0 \\
&\Leftrightarrow & -\lambda\left(\left(\lambda + \tfrac{7}{2}\right)^2 - \tfrac{49}{4} + \tfrac{48}{4}\right) &= 0 \\
&\Leftrightarrow & -\lambda\left(\left(\lambda + \tfrac{7}{2}\right)^2 - \tfrac{1}{4}\right) &= 0 \\
&\Leftrightarrow & \lambda &= 0 \text{ oder } -\tfrac{7}{2} - \sqrt{\tfrac{1}{4}} \text{ oder } -\tfrac{7}{2} + \sqrt{\tfrac{1}{4}} \\
&\Leftrightarrow & \lambda &= 0 \text{ oder } -4 \text{ oder } -3
\end{aligned}$$

Die Eigenwerte der Matrix $B = A - 4\mathbb{1}$ sind also $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -4$ und $\lambda_3 = -3$.
Die Eigenwerte der Matrix $A - 4\mathbb{1}$ erhält man also, indem man die Eigenwerte der Matrix A nimmt und jeweils 4 subtrahiert.

Aufgabe 29: Welche Aussagen sind richtig?

a) Jede diagonalisierbare $n \times n$ Matrix hat n linear unabhängige Eigenvektoren. ja ☐ nein ☐

b) Jede diagonalisierbare $n \times n$ Matrix hat n verschiedene Eigenwerte. ja ☐ nein ☐

c) Jede symmetrische $n \times n$ Matrix hat n verschiedene Eigenwerte. ja ☐ nein ☐

d) Jede symmetrische Matrix ist diagonalisierbar. ja ☐ nein ☐

e) Jede 2×2 Spiegelungsmatrix ist diagonalisierbar. ja ☐ nein ☐

LÖSUNG:

a) **Ja!** Siehe Skript bzw. Vorlesung.

b) **Nein!** Gegenbeispiel: $n \times n$ Einheitsmatrix

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Der Eigenwert $\lambda = 1$ ist n-facher Eigenwert:

$$\det(\mathbf{I} - \lambda\mathbf{I}) = \det((1-\lambda)\mathbf{I}) = (1-\lambda)^n \det\mathbf{I} = (1-\lambda)^n\,.$$

c) **Nein!** Siehe b)! Die $n \times n$ Einheitsmatrix $\mathbf{I}$ ist symmetrisch!

d) **Ja!** Siehe Skript bzw. Vorlesung.

e) **Ja!** Eine 2×2 Spiegelungsmatrix ist symmetrisch. Siehe auch Skript bzw. Vorlesung.