Aufgabe 30: Thema: Positiv definite Matrizen
Sei A eine symmetrische $n \times n$ Matrix. Welche Aussagen sind richtig?

a) Gilt $\det A > 0$, dann ist A positiv definit. ja ☐ nein ☐

b) Ist A positiv definit, dann gilt $\det A > 0$. ja ☐ nein ☐

c) Hat das homogene System $Ax = 0$ eine nichttriviale Lösung, dann ist A nicht positiv definit. ja ☐ nein ☐

d) Ist A positiv definit, dann ist das Gleichungssystem $Ax = b$ für alle $b \in \mathbb{R}^n$ eindeutig lösbar. ja ☐ nein ☐

Aufgabe 31: Berechnen Sie Länge und Richtung der Hauptachsen des durch

$$\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 4yz = 1\right\}$$

gegebenen Ellipsoids.

Aufgabe 32: Bestimmen Sie zur Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

eine Matrix $\mathbf{P}$ so, dass $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$ eine Diagonalmatrix ist.
Tipp: Probieren Sie die Teiler des konstanten Gliedes um die erste Nullstelle des charakteristischen Polynoms zu bestimmen.

Aufgabe 33: In dieser Aufgabe diskutieren wir ein Beispiel, bei dem die Diagonalisierung von Matrizen es uns erlaubt, eine explizite Formel anzugeben für die Berechnung von Gliedern einer Zahlenfolge, die eigentlich durch eine iterative Vorschrift beschrieben werden:

$$\begin{aligned} x_0 = 0 \qquad & x_1 = 1, & \\ x_{n+1} \quad = \quad & x_n + x_{n-1} & \qquad \text{für } n = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

Dies führt auf die Zahlenfolge: $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots$, die sogenannten Fibonacci-Folge.

Um nun eine explizite Formel für die x_n angeben zu können, stellen wir die Iterationsvorschrift als Matrixoperation dar:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{pmatrix}}_{=:\, y_{n+1}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{pmatrix}}_{=:\, y_n} \quad \Leftrightarrow \quad y_{n+1} = A y_n = A^n y_1 \qquad \text{mit } y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Um nun A^n direkt berechnen zu können, diagonalisieren wir A. Gehen Sie wie folgt vor:

a) Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrix A.

b) Zeigen Sie, dass der Vektor $\begin{pmatrix} \lambda_i \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ_i ist.
Tipp: Rechnen Sie im Folgenden so lange wie möglich mit der Variablen λ_i und nicht mit den Werten von λ_i.

c) Diagonalisieren Sie die Matrix A.
Tipp: Erinnern Sie sich daran, dass es für 2×2 Matrizen eine Formel zum Berechnen der inversen Matrix gibt.
Zur Kontrolle:

$$A = BDB^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda_2 \\ -1 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

d) Berechnen Sie A^n.

e) Geben Sie eine Formel für y_{n+1} und dadurch für x_n an.